

연속 시간 푸리에 급수

제6장은 푸리에 해석의 근간이 되는 기초 개념을 다루기 때문에 이미 책에 필요한 거의 모든 내용을 충실히 담았으므로 심화학습 자료가 많지 않고, 책에서 설명된 내용의 보충 설명이 주를 이룬다.

책의 ‘1절 주파수와 신호 표현’과 관련하여 신호 표현을 위한 기저 신호의 직교성의 유용성과 고유 함수의 기저 신호로의 적합성에 대해 추가로 설명하였다.

책의 ‘2절 주기 신호와 푸리에 급수’와 관련하여 수렴 조건인 디리클레 조건에 대한 부연 설명을 추가하였다. 또한 신호 파형의 대칭성에 따른 푸리에 계수 계산의 간소화 관계의 상세한 유도 과정을 제시하였다.

책의 ‘3절 푸리에 급수와 스펙트럼’과 관련하여 신호 파형의 평활도와 관련한 진폭 스펙트럼의 감쇠 특성에 대해 보충 설명을 추가하였고, 깃스 현상의 원인에 대해서도 상세히 설명하였다.

책의 ‘4절 푸리에 급수의 성질’과 관련해서는 주파수 컨벌루션 성질을 활용한 예제를 추가하였다.

6.1 주파수와 신호 표현

6.1.1 변환과 기저 신호

기저 신호와 직교성

정현파를 기본 신호로 채택하여 이의 일차 결합으로 주기 신호를 나타내는 것은 2차원 평면에서 벡터 \vec{i}, \vec{j} 를 기본 벡터로 선정하여 이의 일차 결합으로 벡터 \vec{v} 를 나타내는 것과 기본적으로 같은 종류의 문제이다.

벡터 \vec{v} 가 다음과 같이 벡터 \vec{i}, \vec{j} 에 의해 표현된다고 하자.

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \quad (\text{C6.1})$$

식 (C6.1)의 계수 a, b 를 구하는 것이 이 표현의 관건이다. 이를 위해 식(C6.1)의 양변에 대해 벡터 \vec{i} 및 \vec{j} 와의 내적을 취하면

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{i} \cdot \vec{j} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = a\vec{j} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (\text{C6.2})$$

식 (C6.2)는 두 미지수 a, b 에 대한 연립방정식이다. 그런데, 만약 벡터 \vec{i} 와 \vec{j} 가 직교한다면, 즉 $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ 이라면 식 (C6.2)는 다음과 같이 각각의 미지수에 대한 독립적인 방정식이 되어 복잡하게 연립방정식을 풀지 않고서도 손쉽게 값을 구할 수 있게 된다.

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a\vec{i} \cdot \vec{i} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = a\vec{j} \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (\text{C6.3})$$

이제 논의를 좀 더 확장해보기로 하자. 벡터 \vec{v} 가 3차원 벡터인데 식 (C6.1)과 같이 2차원 평면에 근사화하여 나타내었다가 원래대로 3차원에서 나타내려고 한다면, 기본 벡터 \vec{i}, \vec{j} 에 새로운 벡터 \vec{k} 를 추가하여 다음과 같이 벡터 \vec{v} 를 표현하게 된다.

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad (\text{C6.4})$$

계수 a, b, c 를 구하기 위해 앞의 경우와 마찬가지로 식 (C6.4)의 양변에 벡터 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 와 각각 내적을 취하면

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{i} \cdot \vec{j} + c\vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = a\vec{j} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{j} + c\vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} = a\vec{k} \cdot \vec{i} + b\vec{k} \cdot \vec{j} + c\vec{k} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (\text{C6.5})$$

식 (C6.5)를 미지수 a, b, c 에 대해 연립으로 풀어 구해진 a, b 의 값은 일반적으로 식 (C6.2)를 풀어서 구한 a, b 의 값과는 다르다. 이는 역으로 3차원에서 2차원으로 표현을 바꿀 때에도 마찬가지이다.

그러나 만약 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 가 서로 직교한다면 식 (C6.5)는 식 (C6.3)의 경우와 마찬가지로 각 미지수만의 독립적인 방정식이 된다. 즉

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a \vec{i} \cdot \vec{i} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = b \vec{j} \cdot \vec{j} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} = c \vec{k} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (C6.6)$$

식 (C6.6)과 식 (C6.3)을 비교하면 계수 a, b 의 값은 그대로임을 알 수 있다. 그러므로 벡터 표현의 차원을 늘리더라도 모든 계수를 다시 계산할 필요 없이 새로이 추가된 기본 벡터에 대한 계수만 구하면 된다. 역으로 차원을 줄일 경우에도 제거할 기본 벡터와 계수만 없애면 되고 나머지는 그대로 두면 된다.

이는 기본 벡터의 직교성이 성립할 때만 얻어지는 놀라운 결과로서 계수 계산이 매우 용이할뿐더러 유용성이 크다. 만약 직교성이 성립하지 않는다면, 식 (C6.2)나 식 (C6.5)와 같이 차원이 작을 경우에는 계수를 구하기 위해 연립 방정식을 푸는 것이 어렵지 않을 수도 있겠지만, 차원이 커지게 되면 보통 문제가 아니다.

푸리에 해석에서도 기본 신호인 정현파가 이러한 직교성을 만족하기 때문에 계수 결정 구조가 간단하고 신호의 근사적인 합성이나 에너지 관계(파스발 정리) 등에서 양호한 특성을 갖게 된다.

기저 신호로서의 고유 함수

신호를 (책)식 (6.1)과 같이 기저 신호의 선형 결합으로 표현하는 것과 관련하여 LTI 시스템에 대한 고유 함수의 개념을 잠깐 살펴보도록 하자. (책)식 (6.1)과 같이 $\{\psi_i(t)\}$ 의 선형 결합으로 표현되는 입력 신호 $x(t)$ 에 대한 출력 또한 $\{\psi_i(t)\}$ 의 선형 결합 $y(t) = \sum_i \lambda_i \psi_i(t)$ 로 나타낼 수 있을 때, 신호 $\{\psi_i(t)\}$ 를 해당 시스템의 **고유 함수** ^{eigenfunction}라고 하고, 이에 대응되는 상수 λ_i 를 **고유값** ^{eigenvalue}이라고 한다. 고유 함수는 기저 신호가 갖추면 바람직한 성질 ③에 대한 최적의 해라고 할 수 있다.

4장에서 연속 LTI 시스템을 표현한 미분 방정식을 풀 때 동차해의 꼴을 지수함수 형태로 두었던 것은 지수함수가 연속 LTI 시스템의 고유 함수였기 때문이다. 지수함수 $\psi(t) = e^{st}$ 이 고유 함수가 되는지는 컨벌루션 표현을 이용하여 이 입력에 대한 시스템의 출력을 계산해보면 금방 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \psi(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\
 &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st}
 \end{aligned}
 \tag{C6.7}$$

여기서 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ 는 s 에 종속인 복소 상수로서 시스템의 고유값에 해당한다(8장에서 배우겠지만, 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$ 의 라플라스 변환이다). 따라서 지수함수 $\psi(t) = e^{st}$ 는 연속 LTI 시스템의 고유 함수이다. 또한 지수함수는 기저 신호가 가지면 바람직할 성질들도 잘 만족시킨다. 그러므로 이를 기저 신호로 선택하여 신호들을 표현하고 해석하면 매우 편리하고 유용할 것이다.

실제로 고유 함수의 개념은 앞으로 다루게 될 세 가지의 주파수 영역 변환(푸리에 급수, 푸리에 변환, 라플라스 변환)에 대한 통합적인 틀을 제공한다. 지수함수의 복소 변수 s 가 $s = jk\omega_0$ 와 같이 불연속적인 허수 값을 가지면 푸리에 급수, 한 걸음 더 나아가 $s = j\omega$ 와 같이 연속적인 허수 값을 가지면 푸리에 변환, $s = \sigma + j\omega$ 와 같이 가장 일반적인 복소수로까지 확장되면 라플라스 변환이 된다.

이미 3장에서 살펴보았듯이, 복소 지수함수를 정현파와 마찬가지로 취급할 수 있다는 점을 상기한다면, 정현파를 신호 변환의 기저 신호로 선택한다는 것은 결국 고유 함수를 기저 신호로 선택한 셈이 되는 것이다. 전기회로의 교류 해석에서 정현파 입력에 대한 출력이 크기와 위상이 다른 정현파가 되므로 복소 페이저를 이용해 해석하는 것은 이러한 개념을 적용한 대표적인 결과이다.

예를 들어, 회로에 (책)[그림 6-1(b)]의 신호를 입력으로 인가할 경우 그 자체로는 입력 파형의 특이한 형태로 인해 응답을 구하기가 매우 어렵지만, 그림과 같이 신호를 두 개의 정현파의 합으로 표현하게 되면 중첩의 원리를 이용하여 손쉽게 시스템 응답을 구할 수 있게 된다.

6.2 주기 신호와 푸리에 급수

6.2.3 푸리에 급수의 세 가지 표현

(책)식 (6.18)의 표현은 다음과 같이 (책)식 (6.16)의 코사인파를 복소 정현파로 바꾸어 정리하여도 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t} + e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t}}{2} \right) \\ &= \dots + \frac{c_k}{2} e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t} + \dots + c_0 e^{j0\omega_0 t} + \dots + \frac{c_k}{2} e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t} + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad (C6.8)$$

여기서

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} = \begin{cases} \frac{c_k}{2} e^{j\phi_k}, & k > 0 \\ c_0, & k = 0 \\ \frac{c_k}{2} e^{-j\phi_k}, & k < 0 \end{cases} \quad (C6.9)$$

6.2.4 푸리에 급수의 수렴 조건

푸리에 급수의 수렴 조건인 디리클레 조건 중 조건 ❶을 만족하면 푸리에 급수가 존재하는 것은 보장되지만 그 급수는 모든 점에서 수렴하지 않을 수 있다. 예를 들어, 어떤 함수 $x(t)$ 가 몇 개의 점에서 무한대이면 이 함수를 표현하는 급수는 당연히 그 점에서는 수렴하지 않는다. 이러한 상황을 피하고 수렴을 보장하기 위해서는 또 다른 조건 ❷, ❸이 필요하다. 조건 ❶을 만족하지 않는 주기 신호의 예가 (책)[그림6-6(a)]의 신호로서 1주기 파형은 다음의 식으로 표현된다.

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1 \quad (C6.10)$$

(책)[그림6-6(b)]의 신호는 조건 ❶은 만족하지만 조건 ❷에는 어긋나는 신호의 예로서 1주기 파형은 다음의 식으로 표현된다.

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1 \quad (C6.11)$$

이 신호는 $\int_0^1 |x(t)|dt < 1$ 로 조건 ❶을 만족한다. 그러나, 이 구간 내에서 극대, 극소점의 개수는 무한하다.

(책)[그림6-6(c)]의 신호는 조건 ❶은 만족하지만 조건 ❸에는 어긋나는 신호의 예로서 $x(t)$ 는 무한개의 부분으로 이루어져 있는데, 각 부분은 그 전의 부분에 비해 폭과 높이가 절반이다. 따라서 이 함수의 1주기 상에서의 면적은 명백히 8보다 작다. 그러나 유한한 값을 갖는 불연속 점의 개수가 무한히 많으므로 조건 ❸에 위배된다.

(책)[그림 6-6]에서 볼 수 있듯이, 디리클레 조건을 만족하지 못하는 신호들은 일반적으로 그 성질상 특이한 점을 지니고 있으므로 신호와 시스템을 연구하는 데에는 특별한 중요성은 없다. 실제로 실험실에서 만들 수 있는 주기 신호는 어떠한 것이라도 디리클레 조건을 만족하며, 따라서 수렴하는 푸리에 급수를 갖는다.

6.2.5 파형의 대칭성과 푸리에 계수 계산

주기 신호 $x(t)$ 가 우함수인 경우, (책)식 (C6.26)으로부터

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (C6.12)$$

또한, \cos 항의 계수 a_k 계산을 위한 주기 적분의 피적분 함수는 우함수이므로

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (C6.13)$$

그러나, \sin 항의 계수 b_k 계산을 위한 주기 적분의 피적분 함수는 기함수이므로 다음과 같이 0이 된다.

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt = 0 \quad (C6.14)$$

주기 신호 $x(t)$ 가 기함수인 경우, DC 성분의 계수 a_0 와 \cos 항의 계수 a_k 는 기함수의 주기 적분이 되므로 다음과 같이 0이 된다.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0 \quad (C6.15)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt = 0 \quad (\text{C6.16})$$

sin항의 계수 b_k 를 계산하기 위한 주기 적분의 피적분 함수는 우함수이므로

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (\text{C6.17})$$

$x(t)$ 가 반파 대칭의 경우, $x(t) = -x(t \pm T/2)$ 임을 이용하여 간소화할 수 있다. DC 항의 계수 a_0 에 대해서는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^0 -x(t + \frac{T}{2}) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ &= - \int_0^{\frac{T}{2}} x(t') dt' + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{C6.18})$$

cos 항의 계수 a_k 의 경우도 같은 방법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 x(t) \cos k\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} x(t + \frac{T}{2}) \cos k\omega_0 (t + \frac{T}{2}) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[-\cos k\pi \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & k = \text{짝수} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt, & k = \text{홀수} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C6.19})$$

sin항의 계수 b_k 에 대해서도 a_k 과 같은 방법으로 다음의 결과를 얻는다.

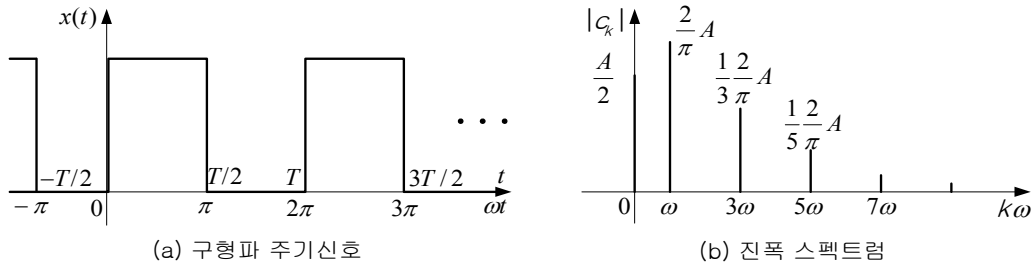
$$b_k = \begin{cases} 0, & k = \text{짝수} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt, & k = \text{홀수} \end{cases} \quad (\text{C6.20})$$

6.3 푸리에 급수와 스펙트럼

6.3.1 푸리에 급수의 의미

■ 예제 C6-1 : 구형파 주기 신호의 푸리에 급수 표현

[그림 C6-1]과 같은 구형파 주기 신호에 대해 삼각함수 형식 푸리에 급수를 구해보자.



[그림 C6-1] 구형파 주기 신호와 진폭 스펙트럼

DC 성분은 다음과 같이 된다.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A dt = \frac{A}{2}$$

cos 항의 푸리에 계수를 구하면 다음과 같이 된다. 즉, 이 주기 신호는 cos 항을 포함하지 않는다.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \cos k\omega_0 t dt = \frac{2A}{k\omega_0 T} \sin k\omega_0 t \Big|_0^{T/2} = 0$$

sin 항의 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin k\omega_0 t dt \\ &= \frac{2A}{k\omega_0 T} (-\cos k\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} = \frac{A}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} 0, & k = \text{짝수} \\ \frac{2A}{k\pi}, & k = \text{홀수} \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 구형파 주기 신호의 삼각함수 형식 푸리에 급수 표현은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1)\omega_0 t + \dots \right) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \cos \left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots + \frac{1}{2k+1} \cos \left((2k+1)\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

푸리에 급수로부터 진폭 스펙트럼을 그리면 [그림 C6-1(b)]와 같고, 위상 스펙트럼은 모든 고조파 성분에 대해 $-\frac{\pi}{2}$ 가 된다. ■

6.3.2 진폭 스펙트럼의 역할

신호의 평활한 정도^{smoothness}는 신호의 도함수들이 몇 차까지 존재하느냐에 의해 판별할 수 있는데, 신호의 $(m-1)$ 차까지의 도함수가 연속이고 m 차 도함수가 불연속이면 진폭 스펙트럼 $c_k(|X_k|)$ 는 적어도 $\frac{1}{k^{m+1}}$ 의 비율로 감쇠한다. 이 결과는 푸리에 급수의 점근적인 수렴 속도를 예측하는 데 유용하다. 정현파는 끊임없이 미분 가능한, 즉 무한 차수의 도함수를 가지므로 $m = \infty$ 인 가장 완만한 신호로서, 진폭 스펙트럼이 $\frac{1}{\infty}$ 의 비율로 감쇠하여 고조파 성분을 전혀 가지지 않는다. 하지만 사각 펄스 신호는 신호 자체가 불연속이므로 도함수가 존재하지 않는다. 즉 $m=0$ 이므로 진폭 스펙트럼이 $1/k$ 의 비율로 느리게 감쇠하게 된다. 또한 삼각파 주기 신호는 1차 도함수가 불연속이므로 $m=1$ 이다. 이러한 이유로 신호 스펙트럼은 $\frac{1}{k^2}$ 의 비율로 감쇠한다.

파형 변화가 급하지 않고 비교적 매끄러운 신호라면, 신호의 대략적인 모양을 만들어주는 몇 개의 두드러진 저주파수 정현파와 세부적인 변화를 맞추어주는 작은 값의 고주파수 정현파들만으로 신호를 만들 수 있다. 이 때문에 진폭 스펙트럼은 주파수 증가에 따라 빠르게 감쇠한다. 따라서 적은 수의 푸리에 급수 항으로도 양호하게 근사적으로 합성할 수 있다. 반면에, 불연속점을 갖는 사각 펄스와 같이 급격한 변화를 포함하는 신호는 이를 구현하기 위해 많은 주파수 성분이 필요할 뿐 아니라 고주파 성분의 크기도 상대적으로 무시할 수 없는 값을 갖는다. 따라서 진폭 스펙트럼은 주파수에 따라서 느리게 감쇠할 것이고, 신호를 근사적으로 합성할 때 오차를 작게 하려면 많은 수의 푸리에 급수 항이 필요하다.

깁스 현상

(책)[그림 6-15]에 나타낸 사각 펄스의 근사 합성 신호에 대해 푸리에 급수 표현의 등식에 근거해서 $N \rightarrow \infty$ 가 되면 오버슈트와 발진이 당연히 없어질 것이라 기대하겠지만, 불행히도 N 이 커질수록 발진의 진동 주파수도 따라서 증가하고, 오버슈트는 N 값에 상관없이 약 9%를 유지한다. 이런 회한한 현상은 수학적 결과와 모순되어 보인다. 이 문제는 알버트 마이클슨(Albert Michelson)이 조파 분석기를 개발하는 과정에서 제기했고, 조시아 깁스(Josiah Willard Gibbs)가 수학적으로 설명하였다.

(책)[그림 6-15]의 사각 펄스는 디리클레 조건을 만족하므로 푸리에 급수가 수렴하여 모든 시간에서 값이 존재하며, 이때 불연속점에서는 불연속 값의 평균으로 값이 정해진다. 그림을 보면 어떤 N 값에 대해서도 합성 신호는 불연속점에서 정확히 그 값(0)을 가지고 있다. 이를 제외한 t 의 임의의 값, 즉 $t=t_1$ 에 대해서는 $N \rightarrow \infty$ 일 때 합성 신호 값이 원래 신호

와 정확히 일치한다. 따라서 사각 펄스의 푸리에 급수 표현에서 오차 제곱의 평균은 0이 된다. 그러나 t_1 이 불연속점 가까이에 선정될수록 특정 값 이하로 오차를 감소시키기 위해 N 이 커져야만 한다. 그러므로 N 이 증가함에 따라 합성 신호의 맥동은 불연속점을 향하여 집중되게 된다. 그러나 발진의 진동 주파수가 N 이고 오버슈트의 빠죽한 부분의 폭이 $1/2N$ 이므로 어떤 유한한 N 값에 대한 맥동의 최댓값은 언제나 일정하다. 이것이 깃스현상이다. 따라서 푸리에 급수 표현에 의거해 불연속 신호를 근사화할 때에는 맥동의 총에너지를 무시해도 될 만큼 충분히 큰 N 값을 선택해야 한다.

가장 평활한 신호인 정현파들로 사각 펄스나 톱니파 같은 극단적인 파형을 만들 수 있다는 게 쉽게 믿어지는가? 1807년 푸리에가 푸리에 급수의 이론을 처음 발표하였을 때 라그랑주나 라플라스 같은 프랑스 아카데미의 동료들을 납득시키지 못한 것도 무리는 아니다. 그 후 디리클레가 삼각함수 급수의 수렴에 관한 이론을 제시함으로써 비로소 이론적 타당성이 완전히 해결되었고 1822년에야 푸리에 급수 이론이 제안된 ‘열의 해석적 이론’은 정식 논문으로 받아들여졌다.

6.4 푸리에 급수의 성질

■ 예제 C6-2 : 푸리에 급수의 주파수 컨벌루션 성질 활용

다음과 같은 두 신호 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 곱 $z(t) = x(t)y(t)$ 의 스펙트럼을 구하여 그려라.

$$x(t) = 2\cos(4\pi t) + 4\cos(6\pi t) \quad \& \quad y(t) = 2\cos(10\pi t)$$

<풀이>

$\cos(4\pi t)$ 의 주기는 $1/2$, $\cos(6\pi t)$ 의 주기는 $1/3$ 이므로 $x(t)$ 는 주기 1인 주기 신호이다. 또한 $\cos(10\pi t)$ 의 주기는 $1/5$ 인데 $x(t)$ 와 $y(t)$ 의 주기를 같게 두려면 주기 1인 주기 신호로 생각하면 된다. 따라서 주기 1, 즉 기본 주파수를 $\omega_0 = 2\pi$ 로 하여 $x(t)$ 와 $y(t)$ 를 푸리에 급수로 전개하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x(t) &= X_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + X_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + X_2e^{j2\omega_0 t} + X_3e^{j3\omega_0 t} \\ &= 2e^{-j3\omega_0 t} + 1e^{-j2\omega_0 t} + 1e^{j2\omega_0 t} + 2e^{j3\omega_0 t} \\ y(t) &= Y_{-5}e^{-j5\omega_0 t} + Y_5e^{j5\omega_0 t} = 1e^{-j5\omega_0 t} + 1e^{j5\omega_0 t} \end{aligned}$$

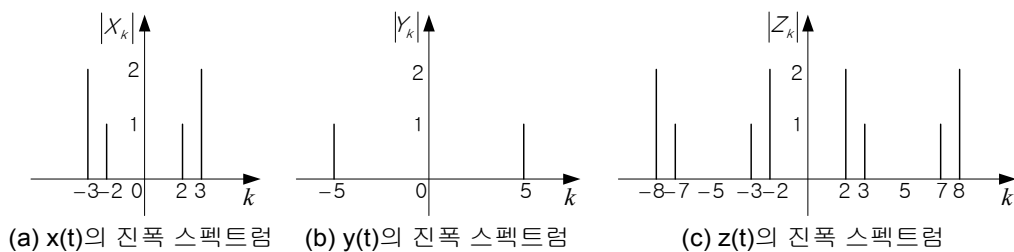
주기 신호의 푸리에 계수, 즉 스펙트럼은 주파수 영역에서 기본 주파수의 정수배에서만 값을 갖는 불연속적인 이산 주파수 함수이므로 계산의 편의를 위해 X_k 와 Y_k 를 다음과 같이 k 에 대한 이산 신호로 나타내도 될 것이다.

$$\begin{aligned} X_k &= X[k] = 2\delta[k+3] + \delta[k+2] + \delta[k-2] + 2\delta[k-3] \\ Y_k &= Y[k] = \delta[k+5] + \delta[k-5] \end{aligned}$$

따라서 $z(t) = x(t)y(t)$ 의 푸리에 계수는 주파수 컨벌루션 성질을 적용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_k &= Z[k] = X[k] * Y[k] = X[k] * \delta[k+5] + X[k] * \delta[k-5] = X[k+5] + X[k-5] \\ &= 2\delta[k+8] + \delta[k+7] + \delta[k+3] + 2\delta[k+2] + 2\delta[k-2] + \delta[k-3] + \delta[k-7] + 2\delta[k-8] \end{aligned}$$

위의 계산에서 컨벌루션의 임펄스와 컨벌루션 성질 $x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$ 를 이용하였다. [그림 6-20]에 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 의 스펙트럼을 나타내었다. 세 신호 모두 위상 스펙트럼은 0이다. 그림에서 볼 수 있듯이 어떤 신호에 주파수 ω_m 인 코사인파를 곱하는 것은 스펙트럼을 $\pm\omega_m$ 만큼 대역 이동시키는 결과를 가져온다.



[그림 C6-2] [예제 C6-2]의 신호들의 스펙트럼