

샘플링과 연속 신호의 디지털 처리

책의 ‘1절 연속 신호의 디지털 처리 시스템’과 관련하여 후처리 필터의 명칭과 기능에 대한 보충 설명을 덧붙였고, 부호화와 복호화에 대한 간단한 예를 보였다. 또한 SNR과 관련하여 양자화 오차에 대한 이론적 분석을 제시하고 동적 구간의 개념을 소개하고, 디지털 신호처리의 목적과 응용에 관한 내용을 별도의 소절을 만들어 보완하였다. 그리고 책에서 소개한 CD 재생 시스템에 대한 부연 설명도 제시하였다.

책의 ‘2절 샘플링과 주파수 중첩’과 관련하여 샘플링의 기능과 그로 인해 야기되는 문제들에 대한 설명을 보충하고, 샘플링의 임펄스 변조 모델의 결과 유도에 대한 다른 접근 방법을 보였다. 또한 주파수 중첩과 관련하여 상세한 설명과 함께 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기의 차이를 명확히 알 수 있도록 하였으며, 이해를 도울 수 있는 예제들을 추가로 제시하였다.

책의 ‘3절 신호 복원’과 관련해서는 영차 홀드를 이용한 복원시 생기는 문제점을 주파수 스펙트럼의 관점에서 상세히 설명하였다.

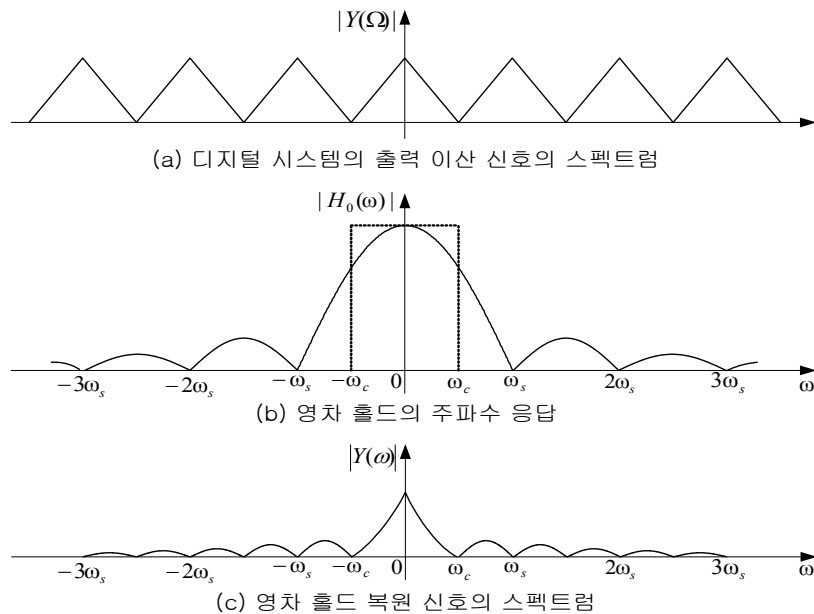
이를 통해 샘플링 주파수와 주파수 중첩 및 복원 신호 사이의 관계에 대해 보다 잘 이해할 수 있을 것이다.

9.1 연속 신호의 디지털 처리 시스템

9.1.2 전처리 필터와 후처리 필터

후처리 필터

후처리 필터는 영차 홀드를 이용해 복원된 연속 신호에 남아있는 고주파 성분을 제거한다. [그림 C9-1]에서 보면, 영차 홀드의 주파수 응답의 부엽^{side lobe}에 의해 (a)의 (샘플링 주파수 정수배에 위치한) 기저 대역 스펙트럼의 측대역 허상들이 (c)와 같이 완전히 제거되지 않는다. 이를 제거하여 파형을 평활화하므로 허상 제거^{anti-imaging} 또는 평활화 필터라고 한다. 후처리 필터 역시 전처리 필터와 마찬가지로 저역 통과 필터이다.



[그림 C9-1] 영차 홀드 복원 신호의 고주파 성분 허상

9.1.3 아날로그/디지털(A/D) 변환기

A/D변환기에서 만약 샘플/유지기가 없다면 최소한 양자화에 걸리는 시간의 반이 넘는 동안 아날로그 입력 신호의 값이 변하지 않아야 무리 없이 디지털 신호로 변환될 수 있는데, 이러한 제한은 비현실적이다. 따라서 샘플/유지기가 필요하다. 특히 대역폭이 큰 신호(이런 신호는 시간에 대한 값의 변화가 빠르다는 것을 상기하라!)를 큰 비트 수로 고해상도 A/D 변환을 할 경우에는 매우 치명적이다.

■ 예제 C9-1 : 양극성 양자화를 이용한 2의 보수형 이진 부호화

$-10 \leq x[n] \leq 10$ 인 이산 신호를 양극성 반올림 양자화를 이용한 3비트 2의 보수형 2진 부호화를 한다고 하자. 이때 $x[n]$ 의 값을 10으로 나누어 표준화하면 (책)[표 9-12]을 그대로

활용할 수 있게 된다. 다음은 몇 가지 값에 대해 부호화한 예로서, 비록 같은 코드로 부호화되더라도 실제 값은 차이가 남을 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} x[n] = 4.5 &\rightarrow x_b[n] = 010, & x[n] = 6.2 &\rightarrow x_b[n] = 010, \\ x[n] = -8.4 &\rightarrow x_b[n] = 101, & x[n] = -6.3 &\rightarrow x_b[n] = 101 \end{aligned}$$

■

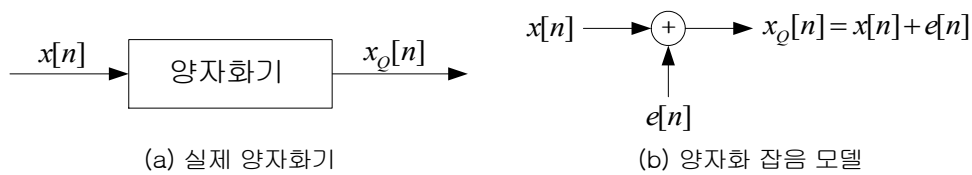
양자화 오차

양자화 오차는 유한한 비트로 연속적인 신호 값을 표시하기 때문에 발생한다. 따라서 양자화에 사용되는 비트 수를 증가시키면 이를 줄일 수 있으나, 비트 수의 증가는 처리 속도, 비용 등 다른 문제들과 결부되어 있어 양자화 오차의 영향을 잘 분석하여 비트 수를 적절하게 선택해야 한다. 예를 들어, 사람의 음성을 처리하거나 통신하는 디지털 시스템은 8~14 비트만으로도 충분하지만 CD와 같이 고음질의 오디오 신호 처리가 필요할 때는 양자화 오차를 줄이기 위해 보다 많은 16비트 이상을 사용한다.

원 신호에 대한 양자화 오차의 영향은 **신호 대 잡음비(SNR)** Signal to Noise Ratio를 사용하여 정량적으로 분석할 수 있다. 신호 대 잡음비는 다음과 같이 dB로 표시된 신호와 잡음의 전력 비로 정의된다.

$$SNR = 10 \log \frac{P_x}{P_e} \quad (C9.1)$$

그런데 (책)[그림 9-5]의 예에서 볼 수 있듯이, 양자화 오차는 불규칙적일 뿐만 아니라 독립적이므로 확률 변수로 간주하여 [그림 C9-2]과 같이 양자화기에 들어오는 잡음 모델로 표현할 수 있다. 그러면 양자화 오차는 양자화 잡음 모델의 평균, 분산, 확률밀도 함수 등과 같은 통계량을 이용하여 분석할 수 있게 된다.

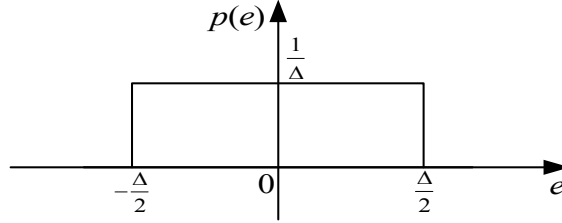


[그림 C9-2] 양자화기의 양자화 잡음 모델

신호와 잡음의 분산이 곧 전력이므로 분산을 구해야 하는데, 우선 $x[n]$ 과 $e[n]$ 의 통계적 성질에 대해 다음의 가정으로 문제를 단순화한다.

- ① $e[n]$ 은 균일 분포를 갖는 정상^{stationary} 백색 잡음이다.
- ② $x[n]$ 은 평균이 0인 정상^{stationary} 신호이다.
- ③ $e[n]$ 과 $x[n]$ 은 상관되어 있지 않다^{uncorrelated}.

반올림 양자화 오차의 확률밀도 함수는 가정 ❶에 의해 [그림 C9-3]과 같이 구간 내에서 항상 크기가 $1/\Delta$ 인 함수가 된다.



[그림 C9-3] 양자화 오차의 확률밀도 함수

$$p(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} \leq e[n] \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (C9.2)$$

이를 이용하여 양자화 오차의 평균을 구하면

$$m_e = E\{e[n]\} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e \cdot p(e) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e de = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} e^2 \right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = 0 \quad (C9.3)$$

이 되며, 평균이 0이므로 분산은 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma_e^2 = E\{(e[n] - m_e)^2\} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 \cdot p(e) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12} \quad (C9.4)$$

양극성 신호의 경우, $-X_m \leq x[n] < X_m$ (신호의 전 범위 $R = 2X_m$)이고 $B+1$ 비트로 양자화 하면 양자화 간격이 $\Delta = R/2^{B+1} = X_m/2^B$ 가 되므로 양자화 오차의 분산, 즉 전력은 다음과 같다.

$$P_e = \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{R^2}{12 \cdot 2^{2(B+1)}} \quad (C9.5)$$

따라서 식 (C9.1)의 신호 대 잡음비는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10 \log \frac{12 \sigma_x^2 2^{2(B+1)}}{R^2} \\ &= 16.81 + 6.02 B + 20 \log \sigma_x - 20 \log R \end{aligned} \quad (C9.6)$$

실제 실무에서 다루는 다수의 아날로그 신호들은 그 값이 대부분 평균 부근에 몰려 있으며,

평균에서 멀어질수록 발생 빈도가 급격히 감소하는 추세를 보인다. 따라서 일반적으로 $\sigma_x = R/8 (= X_m/4)$ 나 $\sigma_x = R/6 (= X_m/3)$ 을 주로 사용한다. 그러면 식 (C9.6)은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$SNR = \begin{cases} 6.02B - 1.25, & \sigma_x = R/8 \\ 6.02B + 1.25, & \sigma_x = R/6 \end{cases} \quad (C9.7)$$

식 (C9.7)에서 우변의 $\pm 1.25[\text{dB}]$ 항은 입력 신호의 특성에 의해 좌우되는 값이며, **양자화의 성능과 직결되는 것은 바로 $6.02B[\text{dB}]$ 항**이라고 할 수 있다. 이 항은 1비트 늘어날 때마다 SNR이 6[dB] 정도 개선됨을 의미하는 것으로, **양자화기의 동적 구간** dynamic range이라고 부른다. 동적 구간은 양자화기의 성능을 표시할 때 널리 사용된다.

■ 예제 C9-2 : 고품질 CD를 위한 양자화기의 선정

고음질의 CD에서는 일반적으로 90[dB]이상의 SNR을 요구한다. 이를 맞추기 위해 최소 몇 비트의 양자화기를 사용해야 하는지 결정하라.

<풀이>

90[dB]이상의 SNR을 맞추기 위해 몇 비트의 양자화기를 사용해야 하는지는 식 (C9.7)에 의해 바로 알아낼 수 있다. 식 (C9.7)로부터 SNR 조건을 구하면

$$6.02B + 1.25 \geq 90$$

이 되고, 이 부등식을 풀면 $B \geq 14.73$ 을 얻는다. 따라서 최소한 16비트 양자화기를 사용해야만 원하는 SNR을 보장할 수 있음을 알 수 있다. ■

9.1.4 디지털/아날로그(D/A) 변환기

복호화

복호화에 의해 $B+1$ 비트 디지털 신호 $y_b[n] = [b_0 b_1 b_2 \cdots b_B]$ 을 이산 신호 $y_Q[n]$ 으로 변환할 때, 변환기가 양극성인지 단극성인지, 그리고 이진 코드가 어떤 부호화 방법을 채용한 것인지에 따라 결과가 달라진다.

가장 흔히 사용되는 몇 가지 경우에 대한 복호화 관계식은 다음과 같다.

· 단극성 자연 이진 부호화($0 \leq y_Q[n] < R$)

$$\begin{aligned} y_Q[n] &= [(b_0 2^{-1} + b_1 2^{-2} + \cdots + b_B 2^{-(B+1)})R]_{10} \\ &= [(b_0 2^B + b_1 2^{B-1} + \cdots + b_B 2^0)R 2^{-(B+1)}]_{10} \\ &= [(b_0 2^B + b_1 2^{B-1} + \cdots + b_B 2^0)\Delta]_{10} \end{aligned} \quad (C9.8)$$

· 양극성 2의 보수형 부호화($-R/2 \leq y_Q[n] < R/2$)

$$y_Q[n] = [(-b_0 2^0 + b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \dots + b_B 2^{-B})R/2]_{10} \quad (C9.9)$$

· 양극성 부호부 크기 부호화($-R/2 \leq y_Q[n] < R/2$)

$$y_Q[n] = [(-1)^{b_0}(b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \dots + b_B 2^{-B})R/2]_{10} \quad (C9.10)$$

■ 예제 C9-3 : 디지털 신호(이진 코드)의 복호화

디지털 신호 $y_b[n] = 10110_2$ 에 대해 앞에서 설명한 각각 다른 부호화 방법에 따른 변환 이진 신호 $y_Q[n]$ 를 구해보자. 단 $R = 64 = 2^5$ 이다.

$y_b[n]$ 이 단극성 자연 이진 부호화에 의한 것이라면 식 (C9.8)으로부터

$$y_Q[n] = (1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5}) \times 2^5 = 22_{10}$$

$y_b[n]$ 이 양극성 2의 보수형 이진 부호화에 의한 것이라면 식 (C9.9)로부터

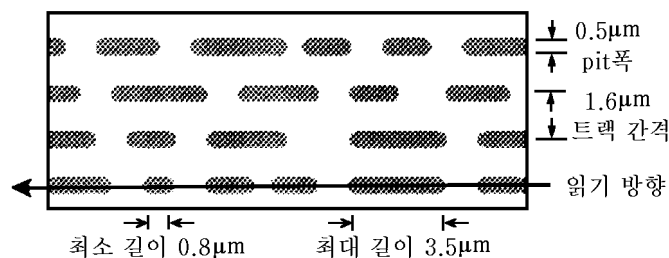
$$y_Q[n] = (-1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4}) \times 2^4 = -10_{10}$$

$y_b[n]$ 이 양극성 부호부 크기 이진 부호화에 의한 것이라면 식 (C9.10)으로부터

$$y_Q[n] = ((-1)^1(0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4})) \times 2^4 = -6_{10} \quad \blacksquare$$

■ <Note> 부연 설명 : 오디오 CD 재생 시스템

CD의 표면은 빛을 잘 반사하도록 광택 처리가 되어 있는데, 디스크 바깥쪽에서 안쪽을 향하여 나선형으로 돌아들어 가는 트랙을 따라 디지털 정보를 저장한다. 이때 레이저를 이용하여 이진 부호화된 정보 패턴에 맞추어 표면을 태움으로써 정보가 CD에 저장되는 것이다. [그림 C9-4]는 CD의 표면을 나타낸 것으로, pit의 어두운 부분이 레이저로 태운 부분에 해당한다. pit 폭과 최소 길이 등은 빛의 초점을 모을 수 있는 물리적 한계를 고려하여 정해진 것이다.



[그림 C9-4] CD의 표면

재생할 때는 트랙을 따라 1초당 1.2[m]씩 일정하게 움직이도록(이 데이터 재생 속도는 430만 [bps]에 해당한다) 최저 210[rpm]에서 최대 480[rpm]으로 속도를 변화시키면서 광학 센서^{pickup}가 표면이 빛을 반사하는지 아닌지를 감지하여 이에 상응하는 이진 정보를 읽어낸다. 이때 초당 데이터 재생 속도와 이동 거리로부터 1[bit]가 트랙에서 차지하는 평균 길이를 거꾸로 계산해보면, 대략 0.28[μm]가 되어 pit의 길이에 대한 조건에 어긋난다. 이 불일치는 CD에 데이터를 기록할 때 8-14변조(EFM)^{Eight-to-Fourteen Modulation} 부호화를 통해서 실제 1[byte](= 8[bit])의 정보를 14[bit]로 바꾸어 해소한다.

9.1.6 디지털 신호 처리의 목적

디지털 신호 처리에서 이루어지는 작업은 매우 다양하지만, 대체로 그 목적에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.

신호 해석

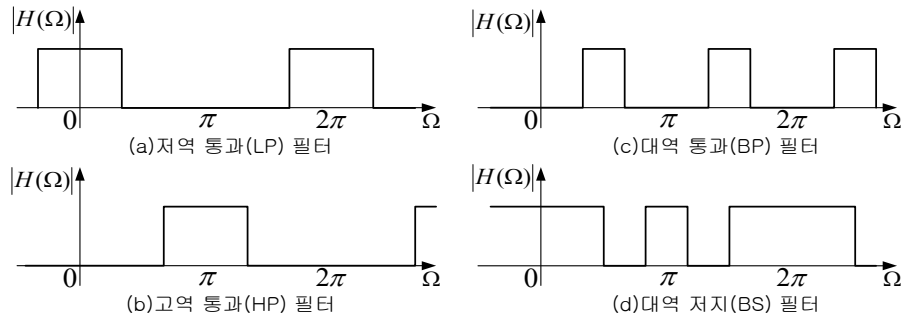
신호 처리에서는 관측된 신호로부터 그 신호의 특정한 성질을 해석하는 것이 필요한 경우가 많다. 스펙트럼 해석과 상관^{correlation} 해석이 대표적인 신호 해석 분야이다. 스펙트럼 해석은 신호 해석의 기본으로서 푸리에 변환을 주로 사용하며, 이 책의 중반부에서 상세히 다룰 것이다. 상관은 신호 간의 유사성을 나타내는 지표로, 잡음이 섞인 신호로부터 원래 신호를 찾아내거나 신호 속에 숨어있는 주기성 등을 알아내는 데 유용하게 쓰인다.

정보 추출

패턴 인식과 같은 응용 분야에서는 신호 해석과 처리에 편리하도록 관측 신호에 포함된 의미 있는 정보를 뽑아내는 것이 우선되어야 할 경우가 많다. 예를 들어, (CSI와 같은 범죄수사극에서) 신원 확인을 위해 용의자 지문의 주요한 특징을 추출해 데이터베이스와 비교한다든지, 레이더에서 수집된 신호로부터 미확인 비행체의 식별을 위해 특징을 추출하는 일 등이 정보 추출에 해당한다. 이러한 정보 추출에는 주로 확률 통계적 방법과 같은 수학적 기법들이 사용된다.

필터링

관측된 신호에는 불필요한 잡음이 섞여 있는 경우가 많다. 예를 들어, 카메라로 찍은 창밖의 풍경은 카메라 렌즈나 유리창이 깨끗하지 않으면 사진 일부분이 선명하지 않거나 얼룩이 질 수 있다. 또한 구글 어스^{Google Earth}와 같이 인공위성에서 찍은 지구의 영상들도 기상 상태나 전송 선로 특성에 기인한 잡음이 섞이게 된다. 이러한 잡음을 제거하여 원래의 깨끗한 신호를 복원하는 것을 **필터링**(잡음 제거)이라고 하며, 잡음의 특성에 따라 [그림 C9-5]와 같은 주파수 선택 필터나 적응 필터를 이용하여 제거하게 된다. 주파수 선택 필터^{frequency selective filter}는 주파수에 따라 원하는 성분만 통과시키거나 불필요한 성분을 제거하는 필터로서, 주파수 특성에 따라 [그림 C9-5]와 같이 저역 통과(LP), 고역 통과(HP), 대역 통과(BP), 대역 저지(BS)의 4가지로 나누어진다.



[그림 C9-5] 주파수 선택 필터의 유형

신호의 압축과 복원

음성이나 영상과 같은 멀티미디어 정보의 활용을 제약하는 주된 요인은 방대한 데이터의 양이다. 데이터의 양이 너무 크면 신호를 저장, 재생, 전송할 때 문제가 된다. 따라서 품질은 최대한 저하시키지 않으면서도 데이터의 양을 줄이는 신호의 압축과 복원(코딩) 기술은 매우 중요하다. 음악 CD의 wav 파일은 1초당 데이터의 양이 1,411.2[kbps] ($44.1[\text{kHz}] \times 16[\text{bit}] \times 2[\text{채널}]$)이지만, 압축한 MP3 파일은 192[kbps] 정도로 비슷한 음질을 제공한다. 또한 동영상을 그대로 700[MB] 용량의 CD에 저장하면 대략 1분 전후의 분량을 담을 수 있지만, avi나 divx와 같은 압축 파일은 120분 정도의 영화 한 편을 양호한 화질로 2장의 CD에 담을 수 있다.

시스템 식별과 신호의 예측

신호는 겉으로 뚜렷하게 드러나진 않아도 자신을 만들어내는 시스템 고유의 특성을 반영하고 있다. 그러므로 적절한 처리에 의해 신호 발생 시스템의 특성이나 구조를 알아낼 수 있다. 이로부터 시스템 모델을 확립, 즉 시스템을 식별하거나 향후의 신호 값을 예측할 수도 있다.

신호의 합성

음성이나 영상과 같은 신호의 합성은 자동화/지능화와 멀티미디어 정보의 활용에 대한 수요가 급증하면서 신호 처리의 중요한 한 분야로 자리 잡고 있다.

디지털 신호 처리의 응용

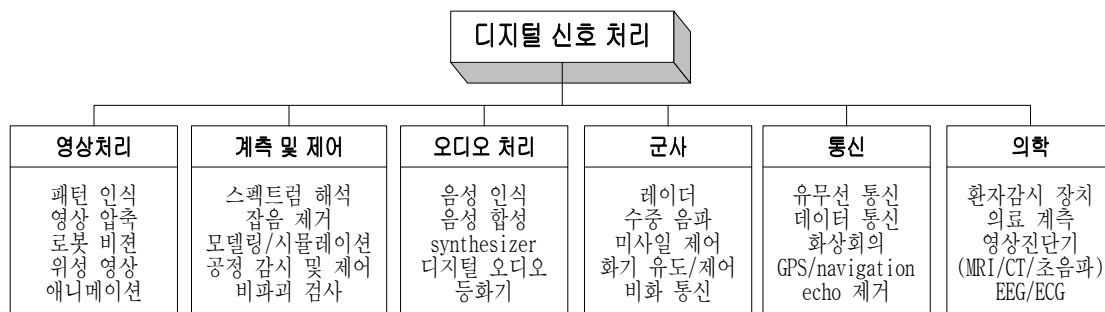
정보의 추출, 가공, 송수신, 이용은 일상생활에서 다반사로 일어나는 행위이다. 따라서 신호 처리 기술이 필연적으로 개입될 수밖에 없으며, 사회와 기술 발전의 추세에 따라 디지털 신호 처리의 응용 분야는 급속도로 팽창하고 있다.

영국에서 열리는 프리미어리그 축구 경기를 한국의 내 집 거실 TV에서 실황으로 시청하는 경우를 생각해보자. 축구 경기장에서 방송 팀이 경기를 촬영하면 영상 및 음성 신호가 만들어져 경기장 옆에 서있는 중계차로 보내진다. 중계차에서는 이를 송신에 적합한 신호로 변환하여 무선으로 방송국에 송신한다. 방송국에서는 이 신호를 다시 변환하여 중계 위성으로

송신하게 되고, 중계 위성은 이를 한국의 기지국으로 재전송한다. 기지국에서 수신된 신호는 방송국으로 다시 송신되고, 방송국에서는 수신된 영상 및 음성 신호를 방송용으로 변환하여 대기 중으로 전파를 방사한다. 그러면 집 TV 안테나가 대기 속에 퍼져 있는 수많은 신호들 가운데 TV 채널이 지정한 특정 방송사의 전파를 검출하게 된다. 이것을 집의 TV가 사람이 보고 들을 수 있는 신호로 바꾼 뒤 신호의 세기를 증폭하여 영상은 LCD 패널로 음성은 스피커로 분리하여 보내면, 최종적으로 영상과 음성이 재생되어 즐겁게 프리미어리그 축구 경기를 관람할 수 있는 것이다.

이상의 모든 과정에서 통신과 변환을 비롯한 다양한 신호 처리가 이루어지고 있음을 알 수 있고, 최근의 방송이나 통신 장비들로 미루어 볼 때 그러한 신호 처리의 상당 부분이 디지털 기술이라는 사실도 알 수 있을 것이다.

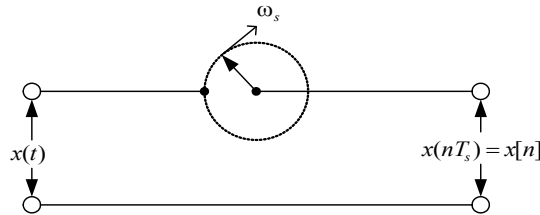
디지털 신호 처리는 관련 이론, 기술 및 제품의 구현, 구현, 그리고 이들의 응용 사이에 항상 긴밀한 관계를 유지하면서 발전해왔다. 지금까지 디지털 신호 처리가 강력한 실용성과 응용성을 가질 수 있었던 이유로는 아무래도 반도체와 컴퓨터의 발달을 꼽을 수 있겠지만, 그렇다고 해서 **고속 푸리에 변환**(FFT^{Fast Fourier Transform})이 기여한 바를 결코 낮게 평가할 수는 없다. 이들의 결합으로 값싸고, 유연하고, 실시간 처리가 가능한 신호 처리 기술을 제공하면서 오늘날과 같은 비약적인 발전을 보이게 된 것이다. 디지털 신호 처리 기술이 활용되고 있는 분야는 헤아리기 힘들 정도로 많지만, 주요한 응용 몇 가지를 [그림 C9-6]에 보았다.



[그림 C9-6] 디지털 신호 처리의 주요 응용

9.2 샘플링과 주파수 중첩

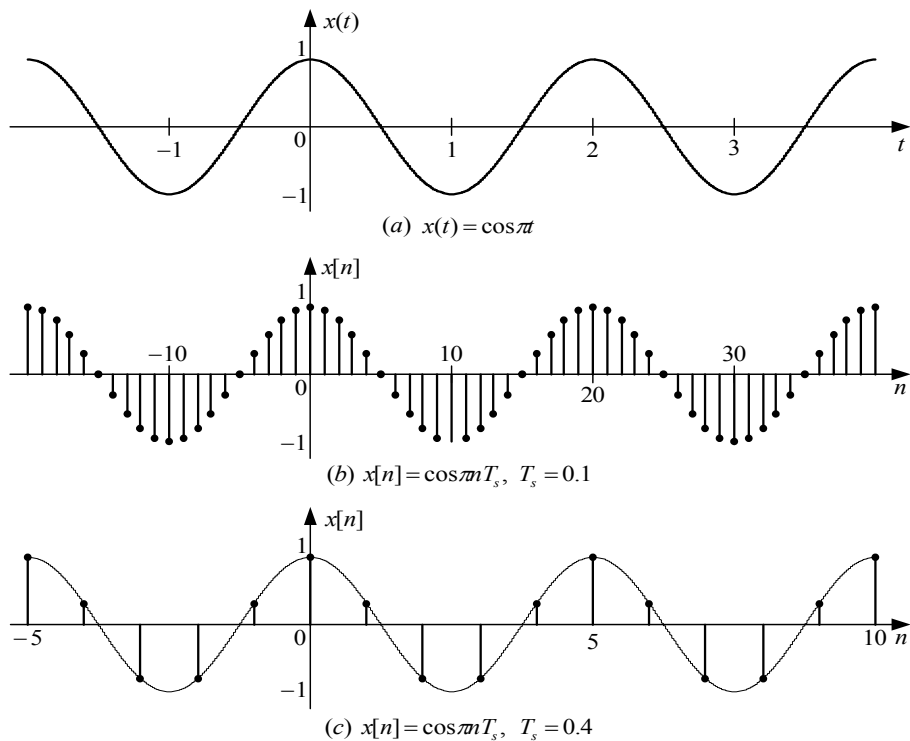
샘플링은 [그림 C9-7]과 같이 입력이 연속 신호 $x(t)$ 이고 출력이 이산 신호 $x[n]$ 인 일종의 회전 스위치로 생각할 수 있다. 각속도 ω_s 로 회전하는 회전 스위치는 한 바퀴 돌 때마다 한 번씩 즉, 매 $T_s = 2\pi/\omega_s$ 초마다 스위치를 닫으며, 이때마다 그 순간의 입력 신호 값이 샘플링되어 출력 단자에 나타나게 된다.



[그림 C9-7] 이상적인 샘플링 모델

9.2.1 정현파 신호의 샘플링

[그림 C9-8]에 정현파 $x(t) = \cos\pi t$ 를 샘플링 주기를 각각 0.1[sec], 0.4[sec]로 하여 샘플링한 예를 보였다.



[그림 C9-8] 정현파 신호와 이를 샘플링한 이산 신호

그림 (b)의 이산 신호는 $T_s = 0.1[\text{sec}]$, 즉 $f_s = 1/T_s = 10[\text{samples/sec}]$ 로 한 주기에 20개의 샘플을 가지며, (c)의 이산 신호는 $T_s = 0.4[\text{sec}]$, 즉 $f_s = 2.5[\text{samples/sec}]$ 이므로 한 주기에 5개의 샘플을 가진다.

그림을 보면, (b)의 경우는 이산 신호로부터 샘플링하기 전의 연속 신호 파형이 정현파라는 것을 대략 눈짐작할 수 있지만, (c)의 경우에는 샘플링된 이산 신호만 보아서는 원래의 정현파 모양을 찾아내기조차 쉽지 않다. 그런데 (b)의 경우라 할지라도 샘플들을 매끈하게 아주 잘 연결하여 얻은 정현파 신호가 샘플링이 수행되기 전의 원래의 연속 신호라고 확실하게 말할 수 없다. 왜냐하면 이산 신호는 단순히 값들이 순서대로 나열된 수열일 뿐으로 샘플링 과정에서 연속 신호에 있던 샘플들 사이의 신호 정보를 잃어버린 데에다가 샘플링 주기에 대한 정보도 전혀 포함하고 있지 않기 때문이다((b)와 (c) 모두 가로축이 시간이 아닌 발생 순서만 표시하고 있다).

따라서 신호를 복원할 때 골치 아픈 문제가 생긴다. (책)[그림 9-9]의 경우에는 그나마 샘플링 주기에 대한 정보가 주어진다면 어떤 주파수의 연속 정현파로 복원할지 결정할 수 있으나, (책)[그림 9-10]의 경우는 샘플링 주기가 동일하기 때문에 그것조차 불가능하다.

9.2.2 샘플링의 임펄스열 변조 모델링

샘플링의 임펄스 샘플링 모델에서 얻은 결과인 (책)식 (9.7)은 책에서 제시한 것과 다른 방법으로 유도할 수 있다.

임펄스 신호의 푸리에 급수 전개에 의한 푸리에 계수는 다음과 같고

$$X_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \quad (\text{C9.11})$$

주기 신호 $x_{T_s}(s)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 되므로

$$X_{T_s}(\omega) = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_s) \quad (\text{C9.12})$$

(책)식 (9.3)으로 표현된 임펄스열의 푸리에 변환은

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \delta(\omega - k\omega_s) = \omega_s \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (\text{C9.13})$$

(책)식 (9.4)의 임펄스열 변조 모델은 주파수 영역에서 푸리에 변환의 성질에 의해 두 신호의 스펙트럼의 컨벌루션이 되므로, 샘플링 결과 얻어진 신호의 스펙트럼은 다음과 같이 표

현할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned} \quad (C9.14)$$

9.2.4 주파수 중첩과 샘플링 신호의 복원

새년의 샘플링 정리는 연속 신호에 대해 나이퀴스트 샘플링 주파수 이상으로 샘플링하게 되면 원래 신호의 복원이 가능하다고 말하고 있다. 이 조건을 정현파에 적용해보면 **한 주기에 2개 이상의 샘플을 취하면 원래 정현파를 복원할 수 있다**는 얘기가 된다. 샘플링 주기에 서 규정하는 충분한 빠르기로 샘플링을 하지 않으면 어떤 일이 생길까?

9.2.1절에서 보았듯이, 주파수가 $f_0 + lf_s$ 인 정현파를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링하면 모두 같은 이산 신호를 얻게 된다. 이는 거꾸로 하나의 이산 정현파 신호로부터 되돌아갈 수 있는 연속 정현파가 무수히 많다는 얘기가 된다. 그런데 (책)[그림 9-12]에서 보듯이, 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링을 하게 되면 원래 신호의 스펙트럼이 f_s 의 정수배마다 반복하여 나타나기 때문에, 저역 통과(LP) 필터를 이용하여 기저 대역에 있는 주파수가 가장 낮은 스펙트럼만 뽑아내는 것이 샘플링 정리에서 제시하는 신호의 복원 원리이다.

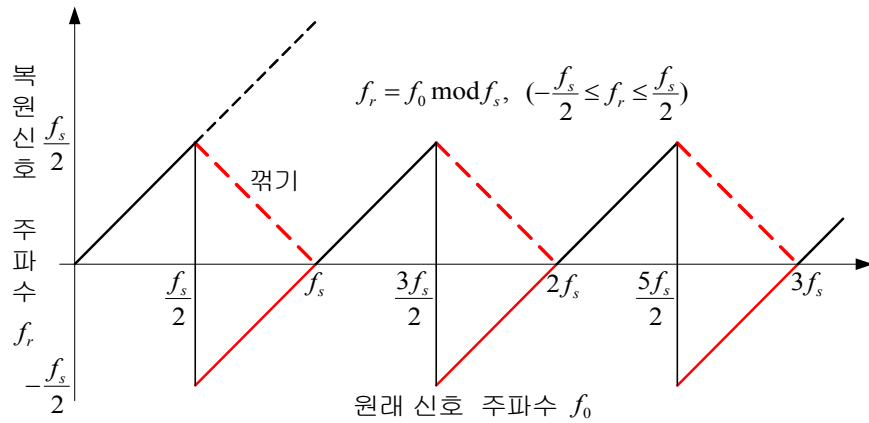
그러므로, 주파수 f_0 인 정현파를 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링을 할 때 과연 어떤 주파수가 가장 낮은 주파수에 해당되는지 차근차근 따져보기로 하자.

먼저 샘플링 정리를 만족하는 경우($f_s \geq 2f_0$)를 살펴보자. $f_0 \leq f_s/2$ 이므로 $|f_0 + lf_s| \geq f_0$ ($l = \dots -1, 0, 1 \dots$)가 되어 가장 낮은 주파수는 f_0 가 된다. 그러므로 LP 필터로 복원되는 정현파는 주파수가 f_0 인 원래의 정현파이다.

다음으로 샘플링 정리를 만족시키지 못하는 경우 중에서 $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 일 때를 살펴보자. 앨리어스 중에 $f_0 - f_s$ ($|f_0 - f_s| \leq f_s/2 \leq f_0$)가 기저 대역 내의 가장 낮은 주파수가 되므로 LP 필터를 이용하여 하나의 정현파만 뽑아내면 음의 주파수 $f_0 - f_s$ 를 갖는 정현파로 복원이 될 것이다. 그런데 물리적으로 음의 주파수는 없으므로, 실제로는 $f_s - f_0$ 의 주파수를 갖는 정현파로 복원이 될 것이다(단 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 에 의해 사인파는 부호가 바뀐다).

원래 신호의 주파수와 복원되는 신호의 주파수 관계를 그래프로 그려보면, [그림 C9-9]에 나타낸 것처럼 $0 \leq f_0 \leq f_s/2$ 구간에서는 복원 신호의 주파수 f_r 가 그대로 f_0 이 되지만, $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 구간에서는 복원 신호의 주파수는 $f_0 - f_s$ 로서 음인테도 붉은 점선으로 나타낸 것처럼 양의 주파수 $f_s - f_0$ 로 복원된다. 그런데 이것은 원래 신호의 주파수 f_0 선을

$f_s/2$ 에서 꺾어서 접은 것과 같다. 그러므로 이를 주파수 꺾기^{frequency folding}라고 한다. **주파수 꺾기는 음의 주파수를 갖는 앨리어스에 의한 주파수 중첩 현상으로서 위상 반전이 발생한다.**



[그림 C9-9] 주파수 중첩과 꺾기

$f_0 \geq f_s$ 의 경우에는 $|f_0 - lf_s| (\leq f_s/2)$ 를 만족하는 $f_0 - lf_s$ 가 기저 대역에 놓이는 가장 낮은 주파수의 앨리어스이므로 이 정현파로 복원된다. 따라서 그림에서 보듯이 $f_0 - lf_s$ 가 $f_s/2$ 보다 큰지 작은지에 따라 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기가 교대로 나타난다. 즉 $0 \leq f_0 \leq f_s$ 구간의 패턴이 f_s 주기로 반복된다.

이상의 결과를 정리하면, (책)식 (9.9)와 같이 복원 신호의 주파수 f_r 은 결국 다음과 같이 원래 신호 주파수 f_0 를 샘플링 주파수 f_s 로 나눈 나머지로 수식화되는 것이다.

$$f_r = f_0 \bmod f_s \quad -f_s/2 \leq f_r \leq f_s/2 \quad (\text{책})(9.9)$$

일반적으로 그림 [C9-9]의 (협의의) 주파수 중첩과 주파수 꺾기를 모두 합하여 넓은 의미로 주파수 중첩 현상이라고 하며, 스펙트럼의 겹침에 의한 신호의 왜곡을 가져온다. 그러나 이를 자세히 분석해보면, 앞의 설명과 같이 두 가지 원인이 작용하는 결과인 것이다. 특히 주파수 꺾기의 경우에는 위상 반전이 발생한다는 사실은 (협의의) 주파수 중첩과는 차이나는 성질로서 주의해야 한다.

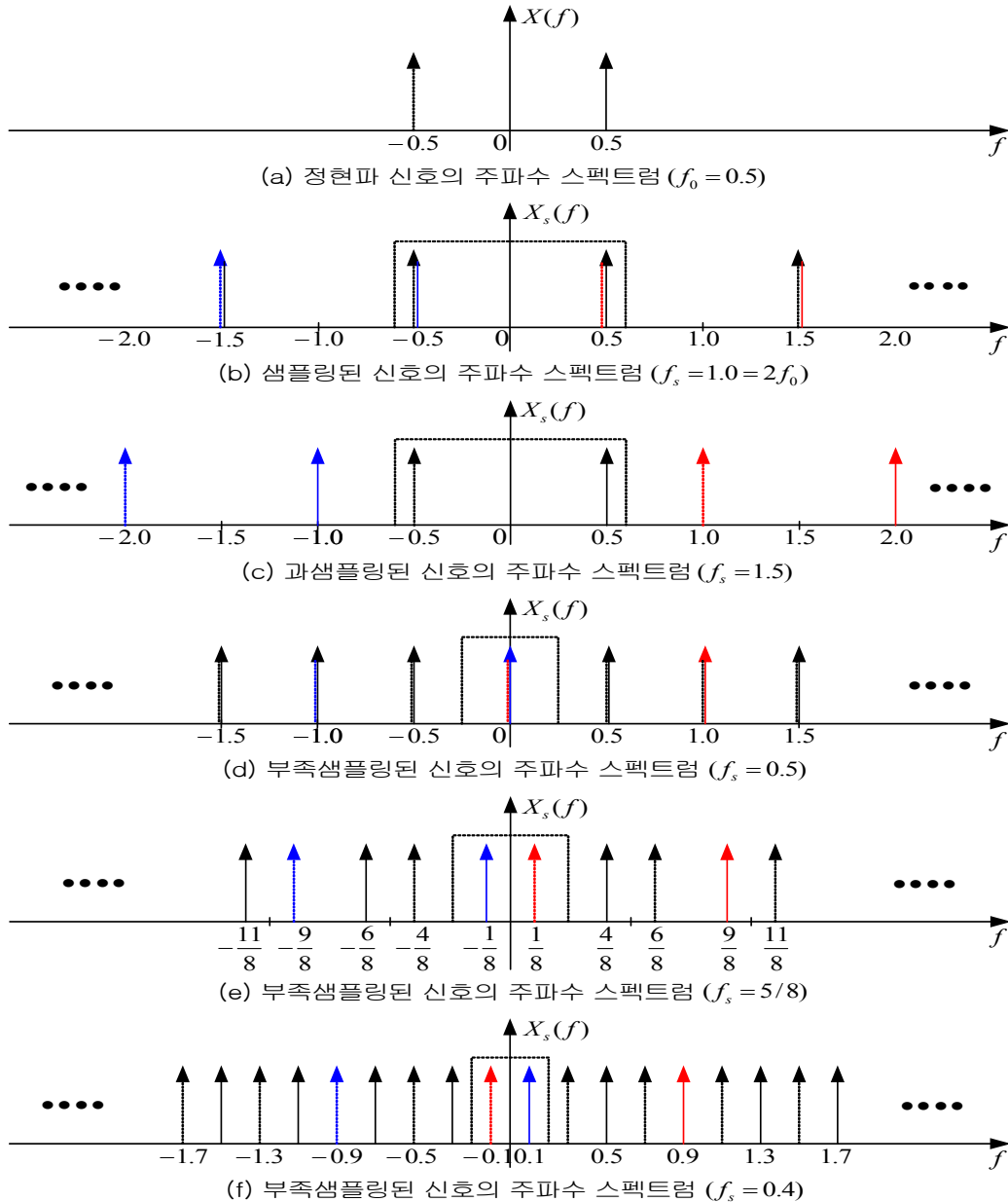
(책)식 (9.9)와 [그림 C9-9]에서 알 수 있듯이, **복원 신호의 주파수는 결코 $f_s/2$ 보다 클 수 없다. 그러므로 샘플링 정리에 충실하게 샘플링 주파수를 신호 주파수의 2배 이상으로 선정해야만 주파수 중첩에 의한 혼란을 피하고 원래 신호로 복원할 수 있게 된다.**

■ 예제 C9-4 : 정현파의 복원 - 샘플링 주파수에 따른 주파수 중첩

정현파 $x(t) = \cos \pi t$ 를 샘플링한 후 이상적인 저역 통과 필터를 이용하여 연속 신호로 복원할 때, 샘플링 주파수에 따라 복원 신호가 어떻게 달라지는지 설명하라.

<풀이>

정현파 $x(t)$ 의 주파수는 $f_0 = 0.5$ [Hz]이므로 주파수 스펙트럼이 [그림 C9-10(a)]와 같다. 그림에서 음의 주파수 스펙트럼 성분은 점선으로 나타내었다.



[그림 C9-10] 주파수 스펙트럼을 이용한 샘플링과 주파수 중첩 현상 분석

나이퀴스트 샘플링 주파수 $f_s = 1$ [Hz]로 샘플링하면, [그림 C9-10(b)]와 같이 양과 음의 주파수 스펙트럼이 겹쳐지면서 반복되므로 기저대역에 다른 주파수 성분이 생기지 않는다. 그리고 더 높은 주파수 $f_s = 1.5$ [Hz]로 샘플링하면, [그림 C9-10(c)]와 같이 주기 f_s 로 반복되는 주파수 스펙트럼이 겹쳐지지 않는다. 따라서 이 두 경우에는 저역 통과 필터를 이용하여 원래 신호를 그대로 걸러낼 수 있다.

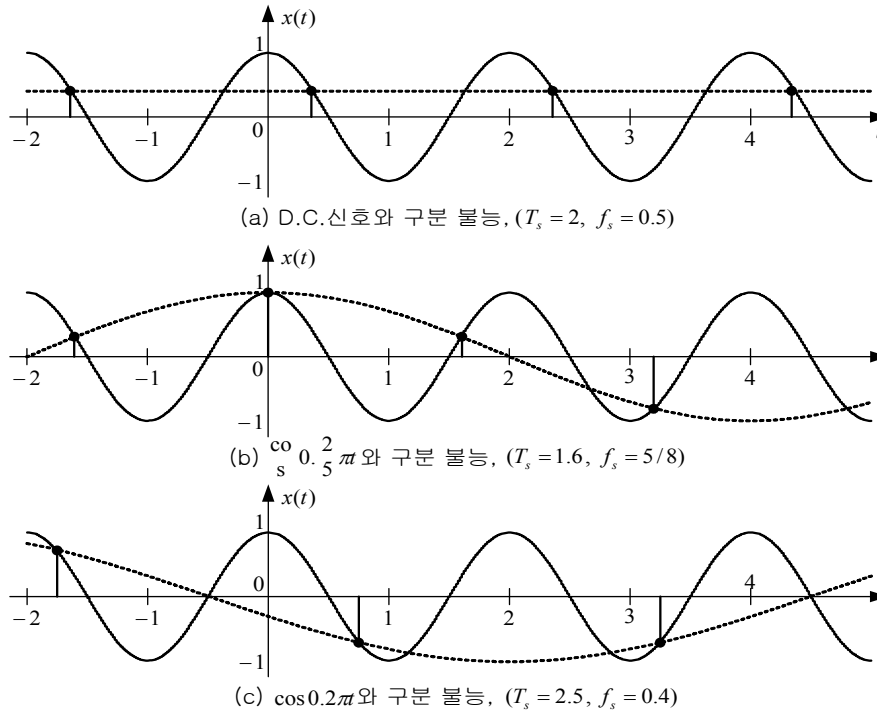
즉, 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 높은 주파수로 샘플링하면($f_s \geq 2f_0$, 과샘플링), $|f_0 + lf_s| \geq f_0$ 이므로 통과대역 $f_s/2$ 내에 생기는 가장 낮은 주파수 성분은 원래 정현파의 주파수인 f_0 가 된다. 그러므로 이 경우에는 주파수 중첩에 의해 생기는 신호 왜곡을 피할 수 있다.

이제 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 낮은 주파수로 샘플링하는 부족샘플링의 경우를 생각해 보자. $f_s = f_0$ 가 되는 $f_s = 0.5$ [Hz]로 샘플링을 할 경우, [그림 C9-10(d)]와 같이 중심 f_s 인 반복 스펙트럼의 음의 주파수 성분과 중심 $-f_s$ 인 반복 스펙트럼의 양의 주파수 성분이 모두 0 [Hz]에 위치하여 전체 스펙트럼은 겹보기에 마치 직류(DC) 신호의 스펙트럼이 f_s 를 주기로 반복되는 것처럼 된다. 따라서 저역 통과 필터로 하나의 신호 성분만 걸러내면 원래의 정현파가 아니라 직류 성분만 뽑혀 나온다.

[그림 C9-10(e)]는 $f_s/2 \leq f_0 \leq f_s$ 의 경우인 $f_s = 5/8$ [Hz]로 샘플링했을 때의 주파수 스펙트럼으로 다음과 같은 특이한 현상을 관찰할 수 있다. 스펙트럼의 중첩이 발생하여 더 낮은 주파수의 정현파 스펙트럼이 기저대역에 생기고, 겹보기에는 마치 이 스펙트럼이 f_s 주기로 반복되는 모양인 것은 앞의 경우와 다를 바가 없다. 하지만 **양의 주파수 성분이 점선이고 음의 주파수 성분이 실선으로 되어 위상 반전이 일어난다**는 점은 특별히 주목할 만하다. 이론적으로 해석하면, $|f_0 - f_s| \leq f_s/2 (\leq f_0)$ 이므로 앨리어스 중에 $f_0 - f_s = -1/8$ [Hz]가 $f_s/2 = 5/16$ [Hz] 내의 가장 낮은 주파수가 된다. 따라서 이 음의 주파수를 갖는 정현파로 복원되어 위상 반전이 일어난다. 물리적으로 음의 주파수는 존재하지 않으므로 실제로는 $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 의 관계에 의해 $f_s - f_0$ 의 주파수를 갖는 정현파로 복원되고, 이때 보다시피 사인파는 부호가 바뀐다. 복원 신호의 스펙트럼 $1/8$ [Hz]는 꺾기 주파수 $5/16$ [Hz]을 축으로 원래 신호의 스펙트럼 $4/8$ [Hz]를 꺾어 접은 값과 같다는 것은 쉽게 확인할 수 있다.

마지막으로 [그림 C9-10(f)]는 $f_s = 0.4$ [Hz]로 $f_s < f_0$ 인 부족샘플링의 경우이다. [그림 C9-10(e)]와 마찬가지로 스펙트럼의 겹침이 발생하여 f_s 와 $-f_s$ 를 중심으로 하는 스펙트럼에 의해 원래 신호의 주파수보다 낮은 $f_r = 0.1$ [Hz]의 정현파 스펙트럼이 생기고, 겹으로는 이 스펙트럼이 f_s 를 주기로 반복되는 양상을 보인다. 하지만 [그림 C9-10(e)]와 달리 위상 반전은 일어나지 않는데, 이는 $|f_0 - f_s| \leq f_s/2$ 로 $f_0 - f_s$ 가 가장 낮은 주파수의 앨리어스이기 때문이다.

지금까지 살펴본 것처럼 부족샘플링의 경우에는 주파수중첩이 발생하여 원래의 신호를 복원할 수 없다. [그림 C9-11]을 보면, 부족샘플링을 한 [그림 C9-10(d)], [그림 C9-10(e)], [그림 C9-10(f)]는 각각 그림에서 점선으로 나타낸 직류 신호, $\cos(-0.25\pi t) = \cos 0.25\pi t$, $\cos 0.2\pi t$ 를 샘플링한 것과 구분되지 않으며, 복원을 하게 되면 $\cos \pi t$ 보다 낮은 주파수를 갖는 이들 신호로 복원된다. ■



[그림 C9-11] 부족샘플링에 의한 이산 신호와 복원 신호

■ (책)[예제 9-3] 보충 설명

신호 $x(t)$ 를 $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 샘플링할 때 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구해보자.

각 정현파 성분 중에서 $f_i \leq f_s/2 = 8/2 = 4$ 를 만족하는 것은 $f_1 = 1, f_2 = 3$ 뿐이다. 나머지는 $f_{ir} = f_i \bmod f_s, -f_s/2 \leq f_{ir} \leq f_s/2$ 으로 복원된다. 각 정현파 성분에 대한 복원 결과의 주파수를 나타내면 다음과 같다.

f_i	1	3	5	7	9
$f_{ir} = f_i \bmod f_s$	1	3	-3	-1	1

따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(-6\pi t) + \sin(-2\pi t) + \cos(2\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) - \sin(6\pi t) - \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) \\
 &= \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) - \sin(6\pi t)
 \end{aligned}$$

이번에는 $f_s = 12[\text{Hz}]$ 로 샘플링할 때 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구해보자.

각 정현파 성분 중에서 $f_i \leq f_s/2 = 12/2 = 6$ 를 만족하는 것은 $f_1 = 1, f_2 = 3, f_3 = 5$ 뿐이다. 나머지는 $f_{ir} = f_i \bmod f_s, -f_s/2 \leq f_{ir} \leq f_s/2$ 으로 복원된다. 각 정현파 성분에 대한 복원 결과의 주파수를 나타내면 다음과 같다.

f_i	1	3	5	7	9
$f_{ir} = f_i \bmod f_s$	1	3	5	-5	-3

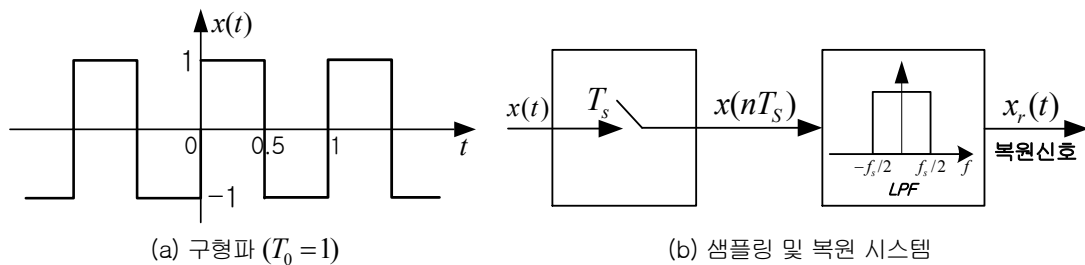
따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(10\pi t) + \sin(-10\pi t) + \cos(-6\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \sin(10\pi t) - \sin(10\pi t) + \cos(6\pi t) \\
 &= \sin(2\pi t) + 2\cos(6\pi t)
 \end{aligned}$$

다시 한 번 강조하지만, 사인파의 주파수 꺾기에 의한 복원 신호는 위상 반전이 발생하여 부호가 바뀌게 된다는 것을 주의해야 한다. ■

■ 예제 C9-5 : 사각 펄스 신호의 샘플링과 복원

[그림 C9-12(a)]의 사각 펄스 신호 $x(t)$ 를 (b)에 나타낸 것처럼 샘플링 주파수 f_s 로 샘플링한 뒤 다시 저역 통과 필터로 복원하려고 한다. 샘플링 주파수를 $f_s = 4$ [Hz], $f_s = 8$ [Hz]로 할 경우 복원 신호 $x_r(t)$ 를 구하라.



[그림 C9-12] 사각 펄스 신호의 샘플링 및 복원 시스템

<풀이>

사각 펄스 신호 $x(t)$ 는 주기 $T_0 = 1$ 인 주기 신호이므로 푸리에 급수로 전개하여 정현파들의 일차 결합으로 나타낼 수 있고, 따라서 정현파의 앨리어스와 주파수 중첩에 대해 지금까지 살펴보았던 결과들을 손쉽게 적용할 수 있을 것이다.

그림에서 보듯이 주어진 신호는 기함수 대칭이며 반파 대칭이므로 푸리에 급수로 전개하면 홀수의 sin 항만 존재한다. 즉

$$\begin{aligned}
 x(t) &= b_1 \sin(2\pi t) + b_3 \sin(6\pi t) + \dots + b_m \sin(2m\pi t) + \dots \\
 &= \sum_{m=\text{odd}} b_m \sin(2\pi m t) = \sum_{m=\text{odd}} b_m \cos(2\pi m t - \pi/2)
 \end{aligned} \tag{C9.15}$$

여기서 b_m 은 다음과 같이 구해지는 푸리에 계수이다.

$$b_m = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(m\pi t) dt = \frac{4}{m\pi}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

이 사각 펄스 신호는 주파수 $f_1 = f_0, f_3 = 3f_0, f_5 = 5f_0, \dots$ 인 무한개의 주파수 성분을 포함하므로 대역 제한 신호가 아니다. 따라서 샘플링을 하게 되면 무한개의 주파수 성분 때문에 어떤 경우이든 주파수 중첩이 발생하게 될 것이며, 다만 샘플링 주파수를 높임에 따라 중첩되는 영역이 줄어들 것이다.

먼저 샘플링 주파수를 $f_s = 4[\text{Hz}]$ 로 할 경우에 대해서 살펴보자. 식 (C9.15)에서 $f_1 = 1[\text{Hz}]$ 인 기본파만 $f_s \geq 2f_1$ 로 샘플링 정리를 만족시킬 뿐 나머지 모든 고조파들에 대해 샘플링 주파수가 나이퀴스트 샘플링 주파수보다 낮게 된다.

그러므로 샘플링한 이산 신호를 저역 통과 필터로 복원을 하면, 기본파만 그대로 복원되고 모든 고조파들은 $f_s/2$ 보다 낮은 주파수를 갖는 앨리어스들로 복원이 될 것이다. 우선 $3, 7, 11, \dots, -1+4l, \dots$ 고조파들은 $f_{-1+4l} = -1 + lf_s$ 을 만족하는 $-f_1 = -1$ 이 최저 주파수의 앨리어스가 되어 주파수 꺾기가 발생하게 된다. 그리고 $5, 9, 13, \dots, 1+4l, \dots$ 고조파들은 $f_{1+4l} = 1 + lf_s$ 을 만족하는 $f_1 = 1$ 이 최저 주파수를 갖는 앨리어스가 된다. 따라서 복원 신호는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \cos(-2\pi t - \frac{\pi}{2})$$

그런데, 물리적으로 존재하지 않는 음의 주파수 정현파를 삼각함수의 성질을 이용하여 바꾸게 되면 **주파수 꺾기에 해당하는 고조파들에 대해서는 복원 신호의 위상 반전이 이루어져** 복원 신호는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+4l} \sin(2\pi t) - \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+4l} \sin(2\pi t) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (b_{1+4l} - b_{3+4l}) \sin(2\pi t) = A \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

위 식의 결과는 낮은 샘플링 주파수 때문에 구형파가 정현파로 완전히 왜곡되어 복원이 이루어지는 것을 보여 주고 있다.

위 식의 마지막 등식 관계로부터 직접 복원 신호의 계수 A 를 구할 수도 있지만, 그보다는 각 샘플링 시각에서는 이산 신호와 복원 신호가 같다는 사실, 즉 $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ 임을 이용하는 것이 훨씬 간편하다. $T_s = 1/f_s = 1/4$ 이므로 $n=1$ 을 대입하면 다음의 관계가 성립된다.

$$x_r(1/4) = A \sin(\pi/2) = x(1/4) = 1$$

이를 풀어 $A = 1$ 을 얻고, 따라서 복원 신호 $x_r(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \sin(2\pi t)$$

샘플링 주파수를 $f_s = 8[\text{Hz}]$ 로 올리게 되면 결과가 어떻게 달라질까?

이 경우에는 식 (C9.15)의 푸리에 급수 전개 표현에서 $f_s/2 = 4$ 보다 주파수가 낮아서 샘플링 정리를 만족시키는 정현파 성분은 $f_1 = 1$ 인 기본파와 $f_3 = 3$ 인 3고조파 두 개가 된다. 그러므로 저역 통과 필터로 복원을 하게 되면 이 두 정현파 성분만 그대로 복원되고, 이들을 제외한 나머지 고조파들은 주파수 중첩으로 인해 $f_s/2$ 보다 낮은 주파수의 앨리어스들로 복원이 될 것이다.

7, 15, 23, ..., $-1 + 8l$, ... 고조파는 $f_{-1+8l} = -1 + lf_s$ 을 만족하는 $-f_1 = -1$ 이 최저 주파수 앨리어스이고, 5, 13, 21, ..., $-3 + 8l$, ... 고조파는 $f_{-3+8l} = -3 + lf_s$ 을 만족하는 $-f_3 = -3$ 이 최저 주파수 앨리어스가 되어 주파수 꺾기가 발생하게 되므로 각각 위상이 반전된 주파수 f_1 과 f_3 의 정현파로 복원된다. 9, 17, 25, ..., $1 + 8l$, ... 고조파는 $f_{1+8l} = 1 + lf_s$ 을 만족하는 $f_1 = 1$ 이 최저 주파수 앨리어스이고, 11, 19, 27, ..., $3 + 8l$, ... 고조파는 $f_{3+8l} = 3 + lf_s$ 을 만족하는 $f_3 = 3$ 이 최저 주파수 앨리어스이므로, 각각 주파수 f_1 과 f_3 의 정현파로 복원된다.

따라서 전체적인 복원 신호는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} b_{1+8l} \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{7+8l} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} b_{3+8l} \cos(6\pi t - \frac{\pi}{2}) + \sum_{l=0}^{\infty} b_{5+8l} \cos(6\pi t + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (b_{1+8l} - b_{7+8l}) \sin(2\pi t) - \sum_{l=0}^{\infty} (b_{3+8l} - b_{5+8l}) \sin(6\pi t) \\ &= B \sin(2\pi t) + C \sin(6\pi t) \end{aligned}$$

앞의 경우와 마찬가지로 $x_r(nT_s) = x(nT_s)$ 을 이용하여 위 식의 계수를 구할 수 있다. $T_s = 1/f_s = 1/8$ 이므로 $n = 1, 2$ 을 대입하면 다음의 관계가 성립된다.

$$B \sin(\pi/4) + C \sin(3\pi/4) = \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}} = 1$$

$$B \sin(\pi/2) + C \sin(3\pi/2) = B - C = 1$$

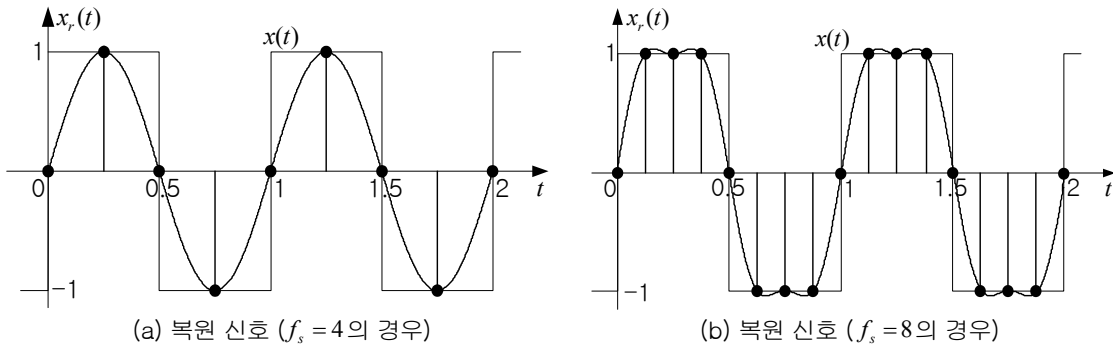
이를 풀면,

$$B = (\sqrt{2} + 1)/2$$

$$C = (\sqrt{2} - 1)/2$$

따라서 복원 신호 $x_r(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$x_r(t) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sin(6\pi t)$$



[그림 C9-13] 주파수 중첩으로 인해 왜곡된 복원 신호

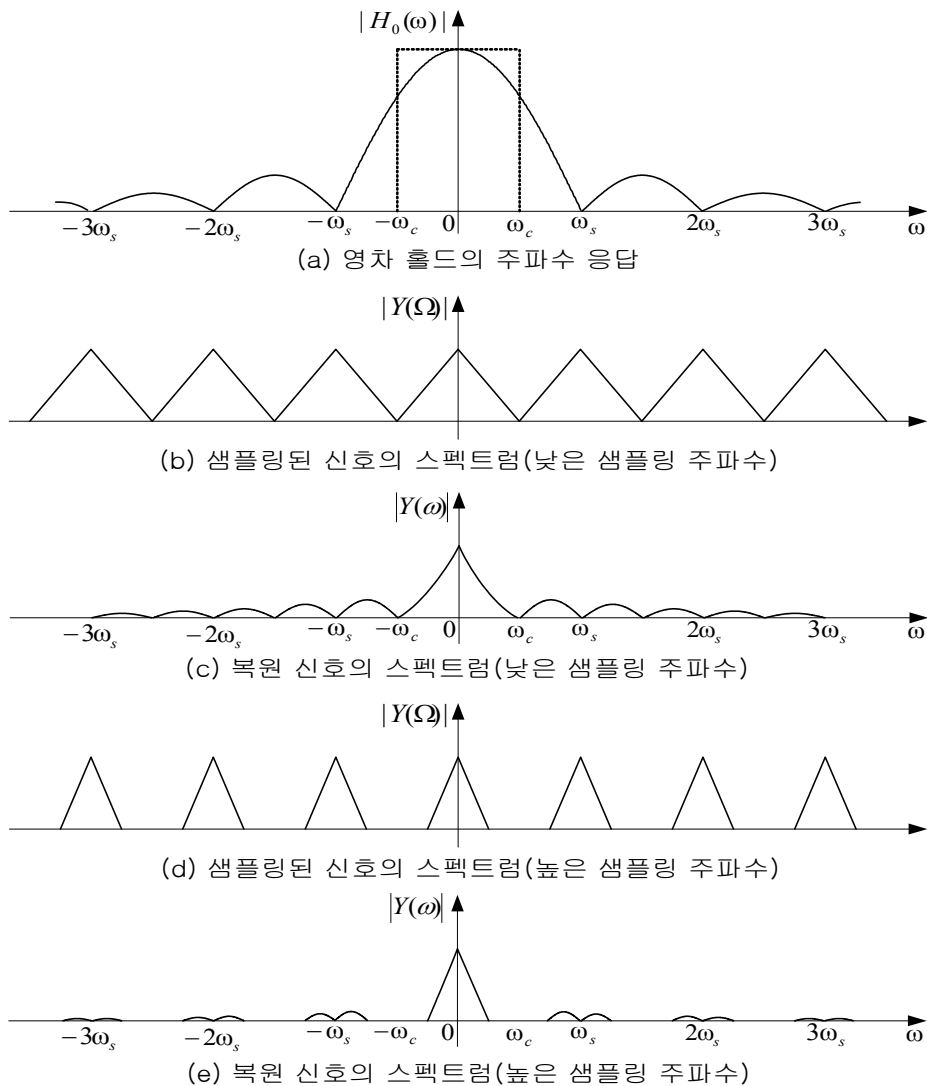
[그림 C9-13]에 두 샘플링 주파수에 대한 복원 신호의 파형을 보였다. 샘플링 주파수를 2배로 올린 $f_s = 8$ [Hz]일 때의 복원 신호는 기본파 성분 외에 3고조파 성분이 추가되어 $f_s = 4$ [Hz]일 때의 복원 신호보다 좀 더 구형파에 가깝다. 이로부터 샘플링 주파수를 높일수록 더 많은 고조파 성분들이 복원 신호에 포함되어 점점 구형파에 가까워질 것이라고 예측할 수 있다. ■

9.3 연속 신호 복원

9.3.3 영차 홀드를 이용한 신호 복원

영차 홀드를 이용한 복원에서 복원 신호의 왜곡을 줄이기 위해 샘플링 주파수를 충분히 높이는 게 바람직하다고 설명했는데, 이를 주파수 스펙트럼의 관점에서 이해해보자.

[그림 C9-14]는 9.1.2절에서 후처리 필터의 보충 설명에 사용된 [그림 C9-1]을 확장하여 그린 것이다. 그림을 보면, (a)의 영차 홀드의 주파수 응답은 주엽^{main lobe}에 의해 이상적인 저역 통과 필터의 통과 대역이 거칠게 근사화되어 있다. 따라서 이득이 통과 대역 전체에 걸쳐 평탄하지 않고 주파수가 높아짐에 따라 크기가 줄어드는 양상을 보인다. 그리고 부엽들이 무시할 수 없는 크기로 존재하는데 샘플링 주파수의 정수배에서 부엽들은 0이 된다.



[그림 C9-14] 영차 홀드 복원 신호의 고주파 성분 허상

샘플링 주파수가 낮은 경우에는 그림 (b)의 기저 대역에 위치한 연속 신호의 스펙트럼이 거의 차단 주파수 부근까지 위치하므로 영차 홀드에 의해 복원된 연속 신호의 스펙트럼은 통과 대역에서 이득이 감쇠하는 영향을 받아 그림 (c)에서 보듯이 원래의 연속 신호의 스펙트럼과는 달리 조금 왜곡되어 있다. 그뿐만 아니라 샘플링으로 인해 나타나게 되는 허상들도 각 부엽의 거의 전 구간에 걸쳐 있어서 무시할 수 없는 크기로 나타난다.

그러나 샘플링 주파수를 높이면 이산 신호의 스펙트럼이 (d)와 같이 된다. 따라서 기저 대역 스펙트럼이 영차 홀드의 주파수 응답 이득이 이상적인 저역 통과 필터에 가까운 평탄한 대역에 위치하므로 (e)에서 보듯이 기저 대역 스펙트럼의 왜곡이 거의 없다. 게다가 샘플링 주파수를 주기로 하여 반복되는 허상 스펙트럼들도 샘플링 주파수를 중심으로 하는 좁은 주파수 대역에 위치하므로 부엽의 영향으로 제거되지 않고 나타나는 고주파 성분도 훨씬 미미해진다.

그러므로 샘플링 주파수를 충분히 높이면, 구태여 후처리 필터를 사용하지 않더라도 만족할 만한 고주파 허상 제거 효과를 얻을 수도 있다.