

연속 시스템의 시간 영역 해석

책의 '1절 임펄스 응답과 컨벌루션 표현'에 대해서는 책에 충분히 잘 설명되어 있으므로 추가적인 학습 자료가 없다.

책의 '2절 컨벌루션 적분의 계산과 성질'과 관련해서는 컨벌루션 계산의 이해를 도울 수 있는 예제와 책에서 제대로 다루지 않은 몇 가지 컨벌루션의 성질에 대해 추가 설명을 보충하였다.

책의 '3절 임펄스 응답과 시스템의 특성'과 관련해서는 필터 등의 시스템을 다룰 때 확실하게 알아두어야 할 시정수의 개념과 관련하여 필요한 사항들을 쉽고 충분한 정도로 설명하였다.

책의 '4절 미분 방정식에 의한 연속 LTI 시스템 해석'과 관련하여 미분 방정식의 일반해의 이론적 근거를 설명하고 동차해와 특이해에 대해 보충 설명을 제시하였다. 또한 초기조건의 중요성과 역할에 대해 자세히 다루고 경계조건 정합 방법을 소개하였다. 그리고 초기조건과 시스템 선형성의 관계 및 초기 휴지 조건에 대해 설명을 보충하였다. 마지막으로 시스템 모드와 공진의 관계, 그리고 시스템 모드와 점근적 안정도의 관련성에 대해서도 상세히 다루었다.

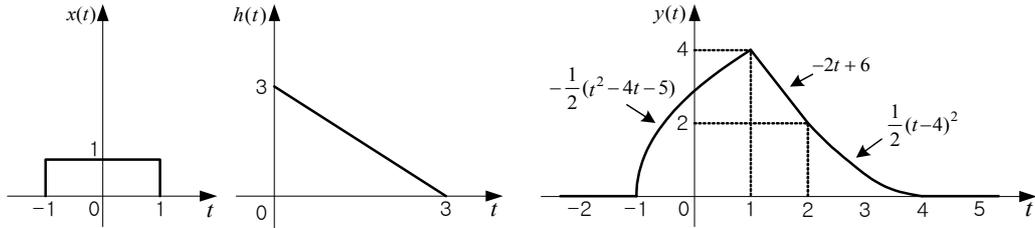
특히 경계조건 정합 문제를 비롯한 몇 개의 추가적인 연습 문제를 이 장의 말미에 제시하였다.

4.2 컨벌루션 적분의 계산과 성질

4.2.1 컨벌루션 연산의 이해와 계산

■ 예제 C4-1 : 미끄럼 방식 컨벌루션 계산

[그림 C4-1]의 신호 $x(t)$ 와 $h(t)$ 의 컨벌루션 $y(t) = x(t) * h(t)$ 를 구하라.



[그림 C4-1] [예제 C4-1]의 신호 $x(t)$, $h(t)$ 와 컨벌루션 결과 $y(t)$

<풀이>

먼저 주어진 신호 $x(t)$ 와 $h(t)$ 는 다음과 같이 수식으로 표현할 수 있다.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} -t+3, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

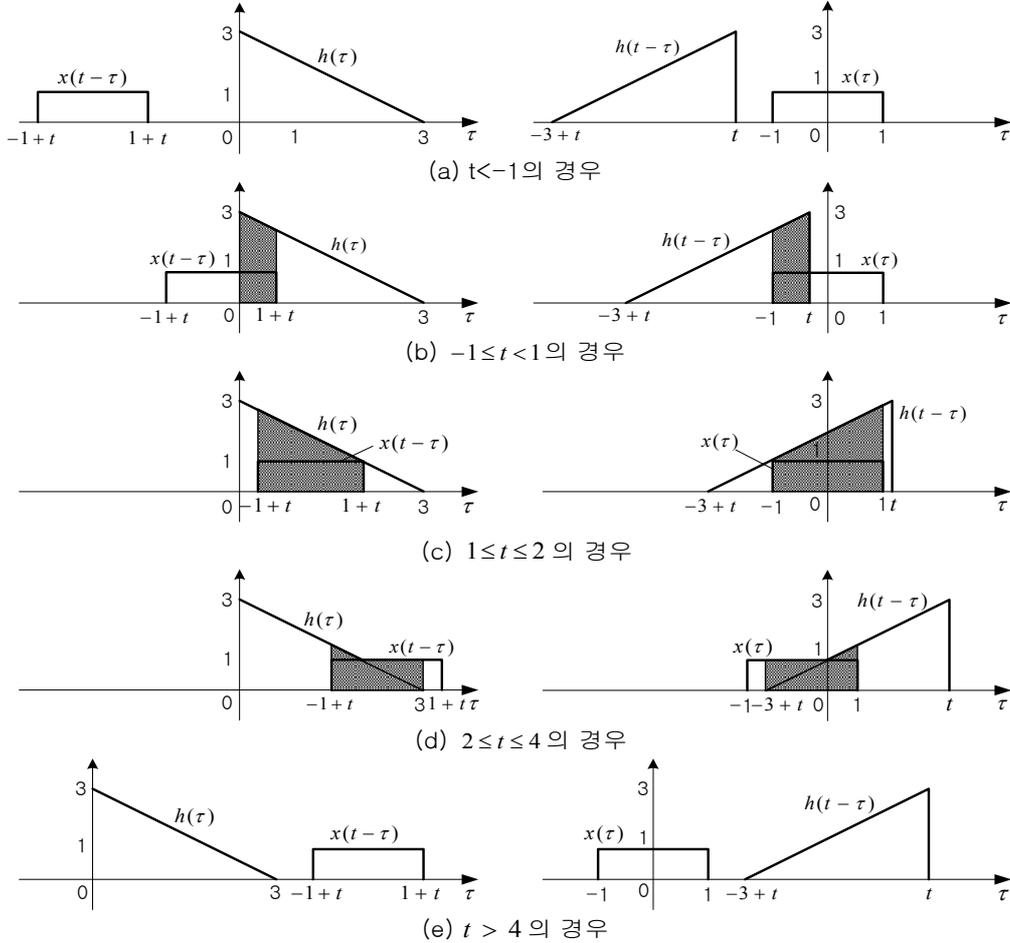
시간축을 t 에서 τ 로 바꾸고 $h(\tau)$ 를 뒤집어 $h(-\tau)$ 를 얻은 뒤 시간 이동시키면, $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 와 겹쳐지는 양상에 따라 [그림 C4-2]의 오른쪽 줄에 나타낸 것처럼 5개의 시간 구간으로 나눌 수 있다.

- ① $t < -1$: 전혀 겹치지 않음 ([그림 C4-2(a)])
- ② $-1 \leq t \leq 1$: $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 에 겹치는 부분이 점점 증가 ([그림 C4-2(b)])
- ③ $1 \leq t \leq 2$: $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 에 완전히 겹침 ([그림 C4-2(c)])
- ④ $2 \leq t \leq 4$: $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 에 겹치는 부분이 점점 감소 ([그림 C4-2(d)])
- ⑤ $t > 4$: 전혀 겹치지 않음 ([그림 C4-2(e)])

구간별로 적분 계산을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{1+t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^t (\tau+3-t)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\tau^2 + (3-t)\tau \Big|_{-1}^t = -\frac{1}{2}(t^2 - 4t - 5), \quad -1 \leq t \leq 1 \\ y(t) &= \int_{-1}^1 x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^1 (\tau+3-t)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\tau^2 + (3-t)\tau \Big|_{-1}^1 = -2t+6, \quad 1 \leq t \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-3+t}^1 x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-3+t}^1 (\tau+3-t)d\tau \\
 &= \frac{1}{2}\tau^2 + (3-t)\tau \Big|_{-3+t}^1 = \frac{1}{2}(t-4)^2, \quad 2 \leq t \leq 4
 \end{aligned}$$



[그림 C4-2] 그림을 이용한 [예제 C4-1]의 미끄럼 방식 컨벌루션 계산

이번에는 $h(\tau)$ 대신에 $x(\tau)$ 를 뒤집어서 계산했을 때도 같은 결과가 얻어지는지 살펴보자. [그림 C4-2]의 왼쪽 줄의 그림들이 이 계산 과정을 나타낸 것으로, $h(\tau)$ 를 뒤집었던 오른쪽 줄 그림의 경우와 마찬가지로 두 신호 $x(t-\tau)$ 와 $h(\tau)$ 의 겹침은 $-1 \leq t \leq 4$ 에서 일어나며, 이를 다시 [그림 C4-2(b)], [그림 C4-2(c)], [그림 C4-2(d)]의 세 구간으로 나눌 수 있는 것도 똑같다. 그림을 잘 살펴보면, 왼쪽과 오른쪽 그림의 두 신호를 곱한 결과(질게 색칠된 부분)들은 좌우가 뒤집혀 있을 뿐 모양이 완전히 일치한다. 다만, 적분 하한과 상한이 다를 뿐이다. 각 시간 구간에 대한 $h(\tau)x(t-\tau)$ 의 면적 값은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^{1+t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^{1+t} (-\tau+3)d\tau \\
 &= -\frac{1}{2}(t^2 - 4t - 5), \quad -1 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-1+t}^{1+t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-1+t}^{1+t} (-\tau+3)d\tau \\
&= -2t+6, & 1 \leq t \leq 2 \\
y(t) &= \int_{-1+t}^3 h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-1+t}^3 (-\tau+3)d\tau \\
&= \frac{1}{2}(t-4)^2, & 2 \leq t \leq 4
\end{aligned}$$

이 결과는 $h(\tau)$ 를 뒤집었을 때와 완전히 일치하지만, 계산이 좀 더 간단하다. ■

4.2.2 컨벌루션 적분의 성질

이동 성질

컨벌루션 $y(t) = x(t) * h(t)$ 는 다음과 같은 이동 성질을 만족한다.

$$y(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t) \quad (C4.1)$$

이동 성질은 입력 $x(t)$ 을 시스템에 인가하여 얻은 출력을 t_0 만큼 시간 이동(지연)시킨 신호와 t_0 만큼 시간 이동(지연)된 입력 $x(t-t_0)$ 을 인가하여 얻은 출력이 같다는 시스템의 시불변성을 나타낸다. 물리적으로는 [그림 C4-3]과 같이 시간 이동(지연) 시스템과 임펄스 응답이 $h(t)$ 인 시스템의 연결 순서를 바꾸어도 상관없다는 의미를 갖는다.



[그림 C4-3] 컨벌루션의 이동 성질의 물리적 의미

미분 성질

신호의 일차 도함수가 존재할 때, 컨벌루션은 미분과 관련하여 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) \quad (C4.2)$$

미분 성질의 물리적 의미는 [그림 C4-4]에 나타난 것처럼 LTI시스템에 입력을 인가하여 얻은 출력을 미분하는 것은 먼저 입력 신호를 미분한 뒤 시스템에 인가하여 출력을 얻는 것과 동일하다는 것을 의미한다.



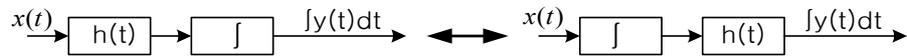
[그림 C4-4] 컨벌루션의 미분 성질의 물리적 의미

적분 성질

컨벌루션은 적분과 관련하여 다음의 관계를 만족한다.

$$\int_{-\infty}^t [x(\lambda) * h(\lambda)] d\lambda = \left[\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] * h(t) \quad (C4.3)$$

적분 성질은 컨벌루션의 정의로부터 쉽게 증명할 수 있으며, 미분 성질의 경우와 마찬가지로 물리적으로는 LTI시스템에 입력을 인가하여 얻은 출력을 적분하는 것과 먼저 입력 신호를 적분한 뒤 시스템에 인가하여 출력을 얻는 것이 같다는 것을 의미한다. 이는 [그림 c4-5]에 잘 나타나 있다.



[그림 C4-5] 컨벌루션의 적분 성질의 물리적 의미

면적 성질

두 신호를 컨벌루션한 신호 $y(t) = x(t) * h(t)$ 의 면적은 컨벌루션하는 각 신호의 면적의 곱과 같다. 이는 다음과 같이 간단히 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) dt \right) d\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) dt \right) \\ &= (x(t)의 면적) \times (h(t)의 면적) \end{aligned} \quad (C4.4)$$

면적 성질은 컨벌루션한 결과가 바른지 간단히 검사하는 데 활용할 수 있다.

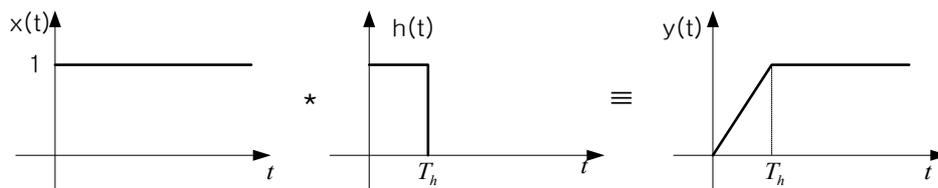
4.3 임펄스 응답과 시스템의 특성

4.3.2 임펄스 응답과 시스템의 특성

시정수

아무리 훌륭한 육상 선수라 할지라도 출발에서부터 자신의 최대 속도를 내기까지는 시간이 걸린다. 시스템도 사람과 마찬가지로 입력에 대해 완전히 응답하기까지는 어느 정도의 시간이 소요된다. 형광등을 켤 때, 또는 펌프를 가동할 때 여러분들은 이런 시간 지연을 경험했을 것이다. 이처럼 입력을 넣었을 때 시스템이 입력에 대해 완전히 응답하기까지 소요되는 응답 시간이 시스템의 시정수이다.

(책)식 (4.19)에 나타낸 시정수 정의의 유용성을 다른 관점에서 살펴보자. 시스템의 계단 응답은 (단위) 계단 신호를 입력으로 인가할 때의 출력으로서 임펄스 응답 $h(t)$ 와 $u(t)$ 의 컨볼루션으로 주어진다. (책)식 (4.19)의 시정수의 정의는 임펄스 응답 $h(t)$ 를 폭이 T_h 인 사각펄스로 대치한 것이므로, 이를 이용하여 계단 응답을 구하기 위한 컨볼루션을 수행하면 [그림 C4-6]과 같이 될 것이다. 그림에서 보면 출력이 0으로부터 순간적으로 최종값(정상 상태 출력)에 도달하지는 못하고 T_h 가 지난 뒤에야 비로소 도달하게 된다. 즉 시스템은 입력에 순간적으로 응답하지 못하며 시스템이 완전히 응답하기 위해서는 시간 T_h 를 필요로 함을 알 수 있다. 따라서 T_h 는 이 시스템의 시정수이다. 또한 T_h 는 단위 계단 입력에 대해 시스템 응답의 값이 직선적으로 증가하여 도달되는 데 걸리는 시간이므로 시스템의 상승 시간^{rise time}의 의미를 갖게 된다.

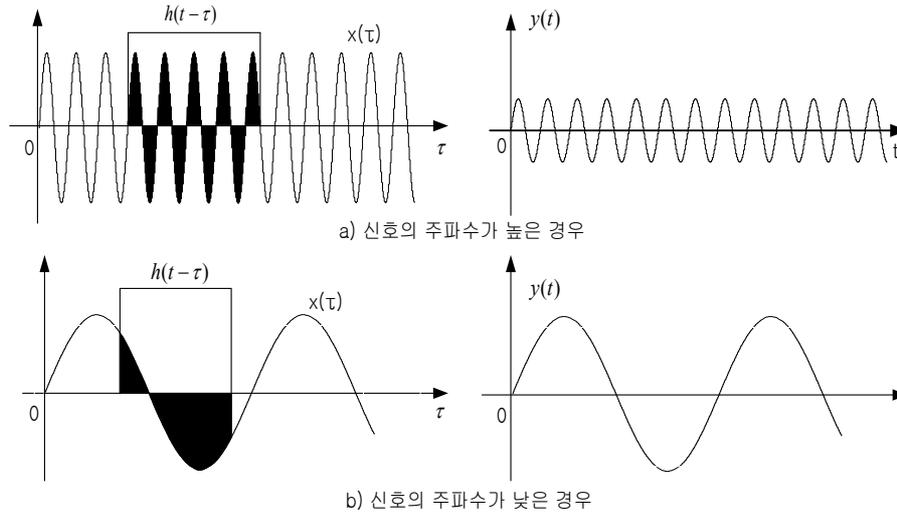


[그림 C4-6] 시스템의 시정수와 상승 시간

시정수는 시스템의 필터링 성질과도 직접적인 관련이 있다. 시스템에 높은 주파수의 정현파를 입력으로 인가한 경우를 생각해 보자. 이 신호는 시간에 따라 급속히 변하는 신호이다. 사각 펄스로 근사화한 임펄스 응답과 정현파 입력을 컨볼루션하여 시스템의 응답을 구하면 [그림 C4-7(a)]와 같이 된다. 입력 $x(t)$ 와 등가 임펄스 응답 $h(t)$ 의 컨볼루션은 두 신호의 곱 $x(\tau)h(t-\tau)$ 의 면적([그림 C4-7(a)]의 그늘진 부분)이 되는데, 그림에서 보듯이 높은 주파수의 정현파에 대해서는 신호의 주기가 시스템의 시정수보다도 훨씬 작기 때문에 양과 음의 면적이 거의 서로 상쇄되어 그 값이 매우 작다. 따라서 출력 $y(t)$ 는 주기적이기는 하지만 입력 신호에 비해 작은 진폭을 갖는다.

이와 반대로 [그림 C4-7(b)]에 나타낸 것처럼 낮은 주파수의 정현파를 입력으로 인가하면

정현파의 주기가 시정수 T_h 보다 크므로 두 신호의 곱 $x(\tau)h(t-\tau)$ 의 면적([그림 C4-7(b)]의 그늘진 부분)의 상쇄 정도는 작다. 따라서 시스템의 출력 $y(t)$ 는 그림에서 볼 수 있듯이 [그림 C4-7(a)]의 경우에 비해 훨씬 더 크다.



[그림 C4-7] 시스템의 시정수와 필터링 효과

이상의 결과로부터 큰 시정수를 갖는 시스템은 고주파 신호를 억제하는 저역 통과 필터처럼 동작한다는 사실을 알 수 있다. 그림으로부터 유추해 보면, 입력 정현파의 주기가 시정수 T_h 와 같아지는 점을 경계로 시스템의 동작이 입력 신호에 대한 억제 동작으로 옮겨가는 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상이 발생하는 주파수를 시스템의 차단 주파수라고 하는데, 차단 주파수 f_c 는 다음과 같이 된다.

$$f_c = \frac{1}{T_h} \quad (C4.5)$$

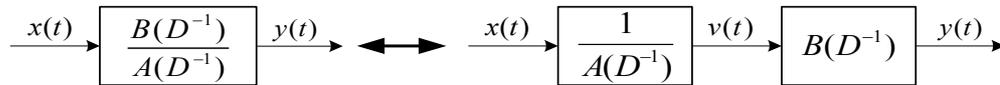
물론 차단 주파수를 전후한 시스템의 동작 변화는 점진적으로 일어나므로 극적인 변화는 없지만 이를 전후하여 시스템은 이 주파수보다 낮은 정현파 성분은 통과시키고, 높은 주파수 성분은 감쇠시키는 동작을 하는 것으로 취급하게 된다. 그러므로 이 차단 주파수를 시스템의 대역폭이라고도 한다.

4.4 미분 방정식에 의한 연속 LTI 시스템 해석

4.4.1 미분 방정식에 의한 LTI 시스템의 표현

제2 표준형 구현도

연속 시스템의 제2 표준형 구현도는 [그림 C4-8]과 같이 시스템을 두 개의 부시스템의 중속 연결로 간주하여 이를 구현한 것이다.



[그림 C4-8] 제2표준형 구현도를 위한 등가 시스템

즉 $v(t) = \frac{1}{A(D^{-1})}x(t)$ 을 $v(t)$ 에 관해 정리한 (책)식 (4.26)과 $y(t) = B(D^{-1})v(t)$ 를 각각 구현한 뒤 적분기를 공통으로 묶으면 제2 표준형 구현도가 얻어지게 된다.

4.4.2 미분 방정식의 고전적 해법

미분방정식의 해

실제로 미분방정식의 일반해가 동차해와 특이해의 합이 되는지를 간단히 살펴보고 넘어가자. 논의의 편의를 위해 (책)식 (4.28)의 미분 방정식을 다시 쓰면

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (\text{책})(4.28)$$

동차해는 정의에 의해 아래의 식 (C4.6)을 만족하며,

$$\frac{d^n y_h(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_h(t)}{dt} + a_0 y_h(t) = 0 \quad (\text{C4.6})$$

특이해는 당연히 식 (C4.7)을 만족한다.

$$\frac{d^n y_p(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_p(t)}{dt} + a_0 y_p(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 x(t) \quad (\text{C4.7})$$

식 (C4.6)과 식 (C4.7)의 양변을 각각 더하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^n [y_h(t) + y_p(t)]}{dt^n} + \dots + a_0 [y_h(t) + y_p(t)] = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 x(t) \quad (C4.8)$$

따라서 $y_h(t) + y_p(t)$ 는 분명히 (책)식 (4.28)의 미분방정식을 만족하므로 이 미분방정식의 해이다. 즉

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (\text{책})(4.29)$$

동차해 구하기

동차해는 동차 미분 방정식 $A(D)y(t) = 0$ 의 해이다. 동차해를 구하는 방법을 찾기 위해 일반적인 경우에 앞서 가장 간단한 1차 시스템의 경우를 고려해 보자.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a_0 y(t) \quad (C4.9)$$

식 (C4.9)는 해의 도함수가 해 자신과 같은 형태의 함수임을 말해준다. 따라서 직관적으로 해가 지수함수 형태일 것이라고 예상할 수 있다. 즉 $y_h(t) = ce^{\lambda t}$ 라 두고 식 (C4.9)에 대입하여 정리하면 다음의 관계를 얻는다.

$$(\lambda + a_0)ce^{\lambda t} = 0 \quad (C4.10)$$

일반적으로 $e^{\lambda t} \neq 0$ 이므로 $\lambda + a_0 = 0$ 을 만족한다. 그러므로 $\lambda = -a_0$ 이 되고, 식 (C4.9)의 해는 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = ce^{-a_0 t} \quad (C4.11)$$

여기서 c 는 임의의 상수로서 식 (C4.9)는 무수히 많은 해를 가질 수 있으므로, 유일한 해를 얻으려면 부가적인 제한이 필요한데 보통 초기조건의 형태로 주어지게 된다.

이상의 논의를 보다 일반적인 경우로 확대하면 (책)식 (4.31)과 (책)식 (4.32)의 결과를 얻게 된다.

특성근이 중근인 경우의 동차해

특성근이 중근이 되면, (책)식 (4.32)에서 중근에 해당되는 항의 계수를 결정할 수 없으므로 해의 형태가 달라지지 않으면 안 된다. 간단한 예로 2중근의 경우를 생각해 보자.

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y(t) = (D - \lambda_1)^2 y(t) = 0 \quad (C4.12)$$

(책)식 (4.32)을 이용하여 동차해를 구하게 되면, 시스템 모드가 $e^{\lambda_1 t}$ 하나이므로 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c e^{\lambda_1 t} \quad (C4.13)$$

이때 만약 초기조건이 $y(0^-) = 1$, $\dot{y}(0^-) = 1$ 로 주어졌다고 하면

$$\begin{cases} c = 1 \\ \lambda_1 c = 1 \end{cases} \quad (C4.14)$$

임의의 값을 갖는 λ_1 에 대해 식(C4.14)를 만족하는 c 는 존재하지 않는다. 따라서 올바른 동차해를 구하기 위해 다른 대안을 찾아야 하는데 우선 동차해를 다음과 같이 가정하자.

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \quad (C4.15)$$

$y_h(t) = c_2 t e^{\lambda_1 t}$ 를 식 (C4.12)에 대입하면

$$\begin{aligned} & (c_2 \lambda_1^2 t e^{\lambda_1 t} + 2c_2 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}) + a_1 (c_2 \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t}) + a_2 c_2 t e^{\lambda_1 t} \\ & = (\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2) c_2 t e^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a_1) c_2 e^{\lambda_1 t} = 0 \end{aligned} \quad (C4.16)$$

이로부터 다음의 관계를 얻는다.

$$\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2 = 0 \quad (C4.17)$$

$$2\lambda_1 + a_1 = 0 \quad (C4.18)$$

식 (C4.17)은 식 (C4.12)의 특성방정식이고 식 (C4.18)은 이의 1차 미분식이다. 이는 식 (C4.12)의 특성방정식의 근 λ_1 이 중근, 즉 특성방정식뿐만 아니라 이의 1차 미분식도 만족한다는 사실에 정확히 부합되는 결과이다. 따라서 $y_h(t) = c_2 t e^{\lambda_1 t}$ 는 앞에서 가정한 것처럼 식 (C4.12)의 해가 맞다.

또한 초기조건 $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ 을 식 (C4.15)와 이의 미분식에 대입하면

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \lambda_1 c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad (C4.19)$$

가 되어, 식 (C4.13)의 경우와 달리 유일한 계수 c_1 , c_2 를 찾을 수 있다.

이상의 논의 과정에서 보았듯이 특성근 λ_1 이 중근인 경우에는 2개의 시스템 모드가 $e^{\lambda_1 t}$ 와 $t e^{\lambda_1 t}$ 임을 유의해야 한다. 지금까지의 결과를 일반화하면, 다중 특성근에 대한 동차해가 (책) 식 (4.33)과 같이 구해지게 되는 것이다.

특성근이 공액 복소근인 경우의 동차해

■ 예제 C4-2 : 특성근이 공액 복소근인 시스템의 동차해

다음과 같은 미분 방정식으로 표현되는 전기회로가 있다고 하자.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

초기조건이 $y(0^-) = 0, \dot{y}(0^-) = -2$ 로 주어지고, 인가 전압이 없다면 회로 방정식의 우변은 0이 되어 초기조건에 의한 출력만 나타나게 된다. 이 미분방정식에 대한 특성방정식은

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

이므로 특성근은 $\lambda = -1 \pm j1$ 이 되어 공액복소근이 된다. 따라서 동차해와 이의 미분은

$$\begin{aligned} y_h(t) &= c_1 e^{(-1+j1)t} + c_2 e^{(-1-j1)t} \\ \dot{y}_h(t) &= (-1+j1)c_1 e^{(-1+j1)t} + (-1-j1)c_2 e^{(-1-j1)t} \end{aligned}$$

가 되고, 이에 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ j(c_1 - c_2) = -2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = j1 \\ c_2 = -j1 \end{cases}$$

따라서 해는 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = j1 e^{(-1+j1)t} - j1 e^{(-1-j1)t} = 2e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

만약 책의 [Note]처럼 동차해를 지수 감쇠 정현파 형태로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y_h(t) &= ce^{-t} \cos(t + \theta) \\ \dot{y}_h(t) &= ce^{-t} \cos(t + \theta) - ce^{-t} \sin(t + \theta) \end{aligned}$$

이에 초기조건을 대입하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} c \sin \theta = 2 \\ c \cos \theta = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

따라서 해는 다음과 같이 얻어지며, 앞에서 구한 결과와 일치한다.

$$y_n(t) = 2e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

이 예제의 풀이 과정을 통하여, 특성근이 공액 복소근인 경우에는 책의 [Note]처럼 동차해를 지수 감쇠 정현파 형태로 나타내는 것이 계산이 좀 더 간편함을 알 수 있다. ■

특이해 구하기

정현파 전압을 회로의 입력으로 인가하면 과도 상태를 거쳐 정상상태에 도달하여 정현파 출력을 나타냄을 이미 회로이론에서 배웠을 것이다. 이는 시스템을 표현한 미분방정식의 동차해 성분은 시간이 지남에 따라 그 값이 0이 되어 다 사라지더라도 외부의 입력에 의해 입력과 같은 형태를 지닌 응답이 발생된다는 사실을 잘 보여주고 있다. 이처럼 외부의 입력에 의해 입력과 같은 형태를 지닌 응답이 바로 특이해로서, 일반적인 해법은 수학적으로 어려우므로 실제로는 책에서 설명한 미정계수법을 주로 이용하게 되는 것이다.

LTI시스템을 표현하는 미분방정식은 좌변과 우변 사이에 등식이 성립되어야 하므로, 좌변은 우변에 포함되어 있는 함수들 외의 다른 형태의 함수들을 포함할 수 없다. 그런데 미분방정식의 우변은 입력 및 이의 도함수들로 구성되어 있으므로 좌변도 이들과 같은 형태의 함수들로 구성되어 있을 것이다. 그리고 좌변은 출력 및 이의 도함수 항들로 구성되어 있기 때문에 극단적인 경우를 생각하더라도 시스템의 출력이 입력 및 이의 도함수 항들을 포함하는 것 외엔 등식을 만족시킬 수가 없다. 다시 말해 입력에 대한 응답, 즉 미분 방정식의 특이해는 입력 함수와 이의 도함수 항들의 선형 결합으로 주어지게 된다.

실제로 우리가 취급하게 되는 대부분의 입력 신호들이 그러하지만, 입력이 서로 독립인 유한개의 도함수를 갖는 경우에는 미정계수법에 의해 특이해를 결정하는 일이 비교적 간단하다. 예를 들어 입력이 e^{at} 또는 t^r 인 형태를 가질 경우가 그러한데, e^{at} 은 아무리 반복 미분하더라도 입력과 같은 꼴의 함수 e^{at} 가 되므로 이것은 단 하나의 독립된 도함수 e^{at} 을 갖는다. 마찬가지로 t^r 을 반복 미분하면 r 개의 독립된 도함수 $t^{r-1}, t^{r-2}, \dots, t, 1$ 을 생성한다. 이러한 신호에 대해서는 미분방정식의 우변이 유한개의 서로 독립인 항들을 가지므로, 특이해를 이들의 선형 결합으로 표현한 뒤 좌변에 대입하여 정리해서 좌변과 우변의 각 항들에 대한 계수를 비교함으로써 특이해의 계수를 결정하여 유일한 특이해를 구하게 된다. 결과적으로 특이해는 시스템 모드를 하나도 포함하지 않고 입력의 형태에 종속적인 함수가 된다.

한 가지 주목할 점은 특이해를 구하는 데 초기조건은 전혀 관여하지 않는다는 사실이다. 누누이 강조하지만 미분방정식의 특이해는 외부에서 넣어주는 입력에 의한 응답의 일부이며 초기조건에 의한 반응은 포함하지 않는다는 것을 꼭 명심해야 한다.

초기 조건과 완전해

동차해와 특이해를 각각 구하여 미분방정식의 해를 얻었다 하더라도 동차해의 계수(적분상수)를 결정해야만 완전해(유일해)가 얻어진다. 잘 알고 있는 바와 같이 미분은 기울기(또는 변화율)를 의미하는데 어떤 함수 $y(t)$ 를 미분한 도함수 $\dot{y}(t)$ 는 유일하게 주어지지만 $\dot{y}(t)$ 의

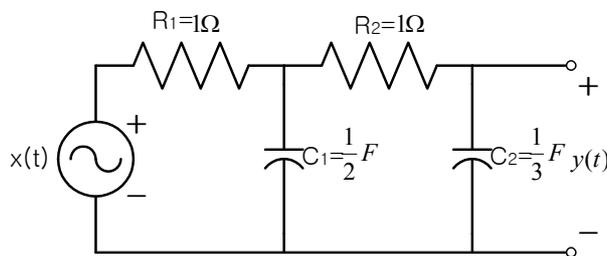
기울기(또는 변화율)을 갖는 함수는 하나가 아니기 때문에 $\dot{y}(t)$ 로부터 $y(t)$ 로 되돌아오기 위해서는 부가적인 정보가 필요하다. 예를 들어, $y(t)=t+3$ 을 미분하면 $\dot{y}(t)=1$ 이 되는데 기울기가 1인 함수는 $y(t)=t+3$ 외에도 무수히 많음을 여러분들은 잘 알고 있을 것이다. 따라서 이들 중 특정한 하나($y(t)=t+3$)로 확정이 되기 위해서는 정보가 더 필요하며, 통상적으로 이 정보는 우리에게 초기조건(또는 경계조건)으로 주어지는 것이다.

어떤 입력에 대한 LTI시스템의 반응은 시스템이 달라지지 않는 한 여러 가지가 나올 수가 없지만, 초기조건이 다르면 시스템의 전체적인 출력은 달라질 수 있다. RLC회로를 예로 들면, 실험을 할 때마다 커패시터의 초기 충전 전압과 초기 폐로 전류의 값을 달리하여 똑 같은 입력 전압을 인가해보면 폐로 전류의 값이 달라지는 것을 관찰할 수 있을 것이다. 이것은 100m 달리기에서 같은 사람을 출발선을 0m, 10m, 20m, 30m 선상으로 달리하여 뛰게 하면 달리는 속도는 변함이 없음에도 불구하고 결승점 통과기록이 달라지는 것에 비유할 수 있다. 즉 시스템은 입력에 맞추어 항상 특정한 출력이 나오게 되지만 시스템의 출력은 또한 초기에 시스템이 어떤 상태에 있었는지에 좌우된다는 것이다.

이제 초기조건을 사용해서 미분방정식의 유일해를 결정하는 과정에 대해서 알아보자. 먼저 동차해와 특이해의 합으로 미분방정식의 해를 표현한 다음, n 차 미분방정식에 대한 초기조건이 $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ 의 초깃값으로 주어지므로 이 조건을 이용할 수 있도록 얻어진 미분방정식의 해의 1차부터 $n-1$ 차 도함수까지 구한다. 미분 방정식의 해와 이들 도함수에 시간변수를 초기 시간값으로 하여 주어진 초기조건들을 대입하면 동차해의 계수, 즉 적분상수 c_1, c_2, \dots, c_n 에 대한 n 개의 독립적인 연립방정식을 얻을 수 있다. 이 연립방정식을 풀어 c_1, c_2, \dots, c_n 을 구하여 미분방정식의 해에 대입하면 미분방정식의 유일해가 얻어지는 것이다.

■ 예제 C4-3 : 영상태 응답과 시스템 모드

[그림 C4-9]의 2계 전기회로에 $t=0$ 순간에 정현파 입력 $x(t)=\sin 2t$ 를 인가했을 때 $1/3[F]$ 의 커패시터 양단의 전압 $y(t)$ 는 어떻게 되는지 알아보도록 하자. 단 입력을 인가하기 전에는 커패시터가 충전되어 있지도 않았고 전류도 흐르지 않았다고 한다.



[그림 C4-9] 2계 전기회로

우선 회로방정식을 세우고 주어진 조건으로부터 초기조건을 구해야 한다. 전원을 포함하지 않는 폐로에 대해 키르히호프의 전압 평형식(KVL)을 세우면

$$v_{C_1}(t) = v_{R_2}(t) + v_{C_2}(t) = R_2 C_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{3} \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

전원으로부터 공급되는 전류 $i_s(t)$ 는 각 커패시터 지로에 흘러 들어가는 전류의 합이 되므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} i_s(t) &= C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} + C_2 \frac{dv_{C_2}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} \right) + \frac{1}{3} \frac{dy(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{6} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5}{6} \frac{dy(t)}{dt} \end{aligned}$$

이제 전원을 포함하는 폐로에 대해 전압 평형식을 세우면

$$x(t) = v_{R_1}(t) + v_{C_1}(t) = \left[\frac{1}{6} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5}{6} \frac{dy(t)}{dt} \right] + \frac{1}{3} \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

이 되고, 이를 정리하면 회로를 나타내는 미분방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6x(t)$$

한편 문제에서 초기 충전 전압과 폐로전류가 없다고 했으므로 전하보존법칙을 적용하면 다음과 같이 초기조건을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} y(0^+) = y(0^-) = 0 \\ \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = 0 \end{cases}$$

회로 미분방정식의 특성방정식과 특성근을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 6)(\lambda + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -6$$

따라서 동차해는 다음과 같다.

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t}$$

정현과 입력을 인가했으므로 특이해를 $y_p(t) = a \sin 2t + b \cos 2t$ 라고 두어 회로 미분방정식에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$(2a - 14b) \sin 2t + (14a + 2b) \cos 2t = 6 \sin 2t$$

양변에 대해 계수를 비교하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{cases} 2a - 14b = 6 \\ 14a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{50} \\ b = -\frac{21}{50} \end{cases}$$

따라서 특이해는 $y_p(t) = \frac{3}{50}\sin 2t - \frac{21}{50}\cos 2t$ 이 되고 미분방정식의 해와 그의 미분은 다음과 같이 된다.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t} + \frac{3}{50}\sin 2t - \frac{21}{50}\cos 2t$$

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 6c_2 e^{-6t} + \frac{6}{50}\cos 2t + \frac{42}{50}\sin 2t$$

위의 두 식에 $t = 0^+$ 로 두고 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} y(0^+) = 0 = c_1 + c_2 - \frac{21}{50} \\ \dot{y}(0^+) = 0 = -c_1 - 6c_2 + \frac{6}{50} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{24}{50} \\ c_2 = -\frac{3}{50} \end{cases}$$

이를 앞에서 구한 미분방정식의 해에 대입하면 커패시터 C_2 의 양단전압 $y(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$y(t) = \frac{24}{50}e^{-t} - \frac{3}{50}e^{-6t} + \frac{3}{50}\sin 2t - \frac{21}{50}\cos 2t$$

$$= \frac{24}{50}e^{-t} - \frac{3}{50}e^{-6t} + \frac{3}{\sqrt{50}}\sin(2t - 81.87^\circ)$$

이 결과에서 볼 수 있는 것처럼 시스템의 초기 상태가 0이기 때문에 영상태 응답만이 나오고 영입력 응답은 전혀 나타나지 않음에도 불구하고, 시스템 응답에는 시스템 모드 e^{-t} , e^{-6t} 의 항들이 존재한다. 이 항들은 시스템의 내부 축적 에너지에 기인하는 항들이 아니라 바로 외부에서 인가된 입력들이 시스템 고유의 특성에 관련되어 만들어 내는 항들이다. 따라서 이 경우에는 고유 응답과 강제 응답이 모두 영상태 응답의 일부이다. ■

영입력 응답+영상태 응답 형태의 해와 경계조건 정합

영입력 응답과 영상태 응답의 합으로 시스템의 응답을 표현하는 것은 응답의 원인별로 구분한 결과이므로 고유 응답 + 강제 응답 형태로 표현하는 것보다 물리적으로는 더 의미가 있다고 볼 수 있다. 그런데 영입력 응답은 시스템 모드만으로 구성되어 있기 때문에 시스템 동작을 이해하는 데에는 매우 중요하지만, 시스템 활용의 실제적인 측면에서는 영상태 응답이 훨씬 중요하다. 그 이유는 앞의 몇 가지 예에서도 보았겠지만 안정한 시스템의 영입력 응답은 시간이 지남에 따라 감쇠하여 곧 무시할 수 있기 때문이다. 더욱이 실제의 시스템은 초기조건이 0인 경우가 대부분이므로 이 응답 성분은 0이다. 따라서 시스템의 활용과 관련

하여 우선적으로 관심을 가지는 것은 외부 입력에 대한 시스템의 반응, 즉 영상태 응답이다. 또한 시스템은 기본적으로 주어진 입력에 대해 특정한 응답을 나타내도록 설계된다.

그러면 시스템을 표현한 미분 방정식과 관련하여 영상태 응답을 어떻게 구할 것인가? 영입력 응답은 동차해에 $t=0^-$ 에서의 초기조건을 대입하여 간단히 결정될 수 있지만, 영상태 응답의 경우는 그렇지 못하고 다음의 두 가지 방법을 생각할 수 있다. 첫 번째는 먼저 주어진 미분방정식에서 임펄스 응답을 구한 뒤 이를 입력과 컨벌루션하는 것이다. 두 번째는 영상태 응답의 정의대로 입력이 인가되기 전의 시스템 상태를 0으로 두고, 즉 $t=0^-$ 순간의 모든 초기 조건을 0으로 두고 미분방정식을 푸는 것이다. 이 경우 동차해의 계수 결정에는 입력이 인가된 직후인 $t=0^+$ 순간의 초기 조건을 사용해야 하므로 먼저 이를 구하는 과정을 거쳐야 한다. 두 가지 방법 모두 **경계 조건 정합**(boundary condition matching)이라는 특이 함수와 관련된 까다로운 수학적 과정이 필요하기 때문에 이해하기가 쉽지 않다

미분 방정식으로부터 임펄스 응답을 구하는 방법을 논의하기 전에 임펄스 응답의 정성적 성질을 다시 한 번 상기할 필요가 있다. 임펄스 응답은 $t=0^-$ 에서의 모든 초기조건이 0이라고 가정한 후 $t=0$ 에서 임펄스를 인가하였을 때의 시스템 응답이다. $t=0^+$ 순간에는 임펄스 입력은 사라져 버려 더 이상 시스템에 입력이 들어오지 않으나, 입력 임펄스에 의한 에너지로 인해 0이 아닌 초기조건이 순간적으로 발생하게 되고, 시스템은 외부에서 인가되는 입력이 더 이상 없음에도 불구하고 새로이 만들어진 초기조건에 의해서 여전히 응답을 발생시킬 것이다. 이에 근거하여 우리는 미분 방정식으로부터 임펄스 응답을 구할 수 있다.

LTI시스템이 다음과 같은 n 차 미분방정식으로 표현된다고 하자.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + b_0 x(t) \quad (C4.20a)$$

$$A(D)y(t) = B(D)x(t) \quad (C4.20b)$$

바로 앞에서 설명한 임펄스 응답의 정성적 성질에 의하면, 임펄스 응답 $h(t)$ 는 $t=0^+$ 에서 다음을 만족시키게 된다.

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 h(t) = 0, \quad t \geq 0^+ \quad (C4.21)$$

식 (C4.21)은 동차 미분방정식으로서 해는 시스템 모드만으로 이루어진 동차해가 된다.

$$h(t) = \sum \text{시스템 모드} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0^+ \quad (C4.22)$$

그러면 $t=0$ 에서는 어떻게 될까? $t=0$ 에서는 임펄스 입력이 존재하기 때문에 식 (C4.20)의 우변이 0이 아니다. 따라서 임펄스 응답은 다음을 만족하게 된다.

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n} + \dots + a_0 h(t) = b_n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} + \dots + b_0 \delta(t), \quad t = 0 \quad (C4.23)$$

특이해의 구득 과정에서와 마찬가지로 식 (C4.23)의 양변에 대한 계수 비교를 통하여 다음과 같이 $t=0$ 순간의 $h(t)$ 를 구할 수 있다.

$$h(t) = b_n \delta(t), \quad t = 0 \quad (C4.24)$$

따라서 식 (C4.22)와 식 (C4.24)로부터 시스템의 임펄스 응답은 다음과 같이 된다.

$$h(t) = b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (C4.25)$$

임펄스 응답을 완전히 결정하기 위해서는 식 (C4.25)에서 시스템 모드 항들의 계수 값을 찾아내야만 한다. 이는 경계조건 정합을 이용하여 $t=0^+$ 에서의 초기조건을 구함으로써 풀 수 있다. 경계조건 정합은 $t=0$ 에서의 미분 방정식의 양변의 특이 함수(singularity function)에 대한 계수 정합을 이용하여 $t=0^-$ 순간에서 $t=0^+$ 순간으로 옮겨올 때의 변수의 불연속 정도를 찾아냄으로써 초기조건을 구하는 과정이다.

수학적 접근에 의한 임펄스 응답에 대한 일반화된 구득식은 다음과 같은데, 이에 대한 상세한 내용은 생략하기로 한다.

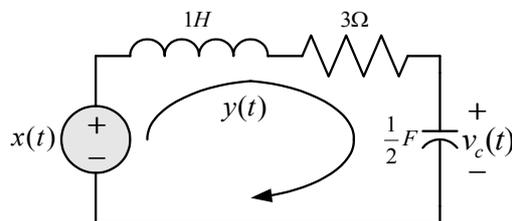
$$h(t) = b_n \delta(t) + [B(D)y_s(t)]u(t) \quad (C4.26)$$

여기서 $y_s(t)$ 는 $y^{(n-1)}(0^-) = 1$, $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \dots = y^{(n-2)}(0^-) = 0$ 의 초기조건 하에서 구한 시스템의 영입력 응답이다.

8장에서 배운 라플라스 변환을 이용하면 영입력 응답+영상태 응답의 형태로 간편하게 시스템 응답을 구할 수 있다. 물론 고유 응답+강제 응답 형태로도 쉽게 해를 구할 수 있으므로, 상수 계수 상미분 방정식의 풀이에는 라플라스 변환을 이용하는 것이 일반적이다.

■ 예제 C4-4 : RLC 회로의 임펄스 응답 - 경계조건 정합

(책)[그림 4-1]의 RLC 직렬회로의 임펄스 응답을 구해보자.



(책)[그림 4-1] RLC 직렬회로

키르히호프의 전압 평형식(KVL)을 세워 정리하면 회로방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (C4.27)$$

임펄스를 입력으로 인가할 경우($x(t) = \delta(t)$) 위의 식은 다음을 만족한다.

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 3\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (C4.28)$$

식 (C4.28)의 우변은 좌변보다 차수가 낮으므로($b_2 = 0$), $h(t)$ 에 임펄스 함수는 포함되지 않는다. 따라서 임펄스 응답은 식 (C4.25)로부터 다음과 같이 될 것이다.

$$h(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \quad (C4.29)$$

인과 시스템의 임펄스 응답은 $t < 0$ 에서 그 값이 0이므로 $h(0^-) = \dot{h}(0^-) = 0$ 이다. 그런데 c_1, c_2 를 구하려면 $h(0^+), \dot{h}(0^+)$ 의 값이 필요하므로 경계조건 정합으로 이를 구해야 한다. 경계조건 정합에서는 특정 시간 순간의 불연속성을 찾아내는 것이 목적이므로 특이 함수에 만 주목하여 계수 비교를 하게 된다. 식 (C4.28)에서 보면 $t = 0$ 에서 우변에 $\delta(t)$ 의 미분항이 포함되어 있으므로 좌변의 최고차항에 $\delta(t)$ 의 미분항이 포함되어야만 한다. 즉

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = \alpha \frac{d\delta(t)}{dt} + \beta\delta(t) + \gamma u(t), \quad t = 0 \quad (C4.30)$$

식 (C4.30)에서 $u(t)$ 는 $t = 0$ 에서 불연속이 존재함을 의미한다. 식 (C4.30)으로부터 미분의 환원을 통하여 다음의 관계들을 얻는다.

$$\dot{h}(t) = \alpha\delta(t) + \beta u(t), \quad t = 0 \quad (C4.31)$$

$$h(t) = \alpha u(t), \quad t = 0 \quad (C4.32)$$

식 (C4.30), (C4.31), (C4.32)를 식 (C4.28)에 대입하여 정리하면 다음과 같고,

$$\alpha \frac{d\delta(t)}{dt} + (3\alpha + \beta)\delta(t) + (2\alpha + 3\beta + \gamma)u(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

위 식의 양변의 계수 비교를 통하여 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

따라서 $t=0$ 에서 식 (C4.32)로부터 $h(t)$ 는 1만큼의 불연속을 가짐을, 식 (C4.31)로부터는 $\dot{h}(t)$ 가 -3만큼의 불연속을 가짐을 알 수 있다. 즉

$$\begin{cases} h(0^+) - h(0^-) = 1 \\ \dot{h}(0^+) - \dot{h}(0^-) = -3 \end{cases}$$

위 식에 $t=0^-$ 에서의 초기조건 값을 대입하여 풀면 $t=0^+$ 에서의 초기조건 $h(0^+) = 1$, $\dot{h}(0^+) = -3$ 을 얻게 된다. 한편 식 (C4.29)의 $h(t)$ 의 미분은 아래와 같으므로

$$\dot{h}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

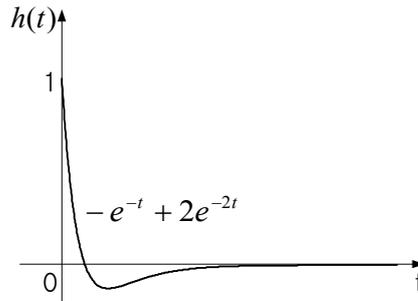
위 식과 식 (C4.29)에 $t=0^+$ 로 두고 조금 전에 구한 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} h(0^+) = c_1 + c_2 = 1 \\ \dot{h}(0^+) = -c_1 - 2c_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

따라서 주어진 전기회로의 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

[그림 C4-10]에 이 임펄스 응답의 파형을 보였다. ■



[그림 C4-10] 회로의 임펄스 응답

■ 예제 C4-5 : RLC 회로의 영상태 응답 - 경계조건 정합

(책)[예제 4-12], [예제 4-13]과 관련하여 영상태 응답을 경계조건 정합을 이용하여 구해보자.

입력이 $x(t) = 10e^{-3t}$ 이므로 $x(0^-) = 0$ 이고 $x(0^+) = 10$ 이 된다. 따라서 $t=0$ 에서 $x(t)$ 에 10만큼의 불연속성이 존재한다. [예제 C4-4]의 풀이 과정에서 살펴보았던 경계조건 정합의 논리에 따르면 $x(t)$ 에 1의 불연속성이 존재하면 $\dot{x}(t)$ 에 $\delta(t)$ 가 한 개 포함된다. 따라서 이 경우 $\dot{x}(t)$ 에 $10\delta(t)$ 가 포함된다. 따라서 식 (C4.27)의 미분방정식의 우변에 특이함수 $10\delta(t)$

가 존재하므로 좌변도 같은 양의 특이함수를 가져야 하는데, 도함수간의 관계에 의해 좌변의 최고차 항인 $\ddot{y}(t)$ 에 $10\delta(t)$ 가 포함되어야 한다. 이것은 $t=0$ 에서 $\dot{y}(t)$ 에 10만큼의 불연속이 존재함을 뜻한다. 그런데 $\dot{y}(t)$ 에는 $\delta(t)$ 나 이의 도함수들이 포함되지 않으므로 $y(t)$ 는 $t=0$ 에서 불연속을 가지지 않는다. 이상의 결과를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} y(0^+) - y(0^-) = 0 \\ \dot{y}(0^+) - \dot{y}(0^-) = 10 \end{cases}$$

영상태 응답은 초기조건이 0일 경우의 응답이므로 $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$ 을 위 식에 대입하여 풀면 $y(0^+) = 0, \dot{y}(0^+) = 10$ 을 얻는다.

이후의 풀이 과정은 방금 구해진 초기조건에 대해 미분방정식 식 (C4.27)을 푸는 고전적 과정을 그대로 진행하면 된다. (책)[예제 4-12]에서 구한 특이해와 동차해를 이용하면 영상태 응답과 그 미분은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y_i(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - 15e^{-3t} \\ \dot{y}_i(t) &= -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + 45e^{-3t} \end{aligned}$$

위의 두 식에 앞에서 경계조건 정합을 통해 구한 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 15 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 45 = 10 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -5 \\ c_2 = 20 \end{cases}$$

따라서 영상태 응답은 다음과 같이 된다.

$$y_i(t) = -5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}$$

이 결과는 (책)[예제 4-13]의 결과와 일치한다. ■

4.4.3 시스템 모드와 시스템의 특성

시스템의 선형성과 초기 조건의 관계 - 초기 휴지 조건

LTI 시스템은 상수계수 선형 상미분 방정식으로 표현된다. 그렇다면 과연 특정한 상수 계수 선형 상미분 방정식은 어떠한 경우에라도 항상 동일한 선형 시스템을 대표하는 식이 될 수 있을까? 별생각 없이 “그렇다”라고 대답해도 아무런 문제가 없겠는가? 미안하지만 사실은 그렇지가 못하다. 이 질문에 대한 해답의 열쇠는 초기조건이 쥐고 있다.

결론부터 말하자면, 초기조건이 0일 경우에는 항상 성립한다. 그러나 초기조건이 0이 아닐

경우에는 시스템 동작 조건의 변화에 맞게 초기조건도 수정되어야만 시스템의 선형성이 보장된다. 이때 선형성 중에서 동차성을 만족시키기 위해서는 입력의 진폭 척도조절만큼 초기조건을 척도조절해야 하고, 가산성을 만족시키기 위해서는 각각의 입력에 대한 초기조건을 더해야만 한다.

■ 예제 C4-6 : 미분방정식의 선형성과 초기조건

다음과 같은 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템을 생각해 보자.

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t) \tag{C4.33}$$

초기조건이 $y(0^-) = 2$, 입력이 $x(t) = e^{-t}$ 라고 하면, 특성방정식이 $\lambda + 2 = 0$ 이므로 특성근은 $\lambda = -2$ 가 되고 동차해는 $y_h(t) = ce^{-2t}$ 가 된다. 따라서 영입력 응답은 $y_s(t) = ce^{-2t}$ 에 초기조건을 대입하면 $c = 2$ 가 되므로 $y_s(t) = 2e^{-2t}$ 가 된다.

영상태 응답을 구하기 전에 먼저 임펄스 응답을 구해야 한다. 식 (C4.33)에서 입력을 $x(t) = \delta(t)$ 라 두면 임펄스 응답을 얻을 수 있는데, $t > 0$ 에서 동차 미분방정식이 되므로 $h(t) = ce^{-2t}$, $t > 0$ 가 되고, 계수 결정을 위해 경계조건 정합으로 $h(0^+)$ 를 찾아야 한다. $t = 0$ 에서 식 (C4.33)의 우변이 $\delta(t)$ 가 되므로 좌변도 반드시 $\delta(t)$ 를 포함해야 한다. 따라서 $\dot{h}(t)$ 에 $\delta(t)$ 가 포함된다. 이로부터 $h(t)$ 에 1만큼 불연속이 존재하므로 $h(0^+) - h(0^-) = 1$, 즉 $h(0^+) = 1$ 이다. 이것을 $h(t) = ce^{-2t}$ 에 대입하여 정리하면 $c = 1$ 을 얻는다. 즉 임펄스 응답은 $h(t) = e^{-2t}$ 이 된다.

따라서 입력 $x(t) = e^{-t}$ 에 대한 영상태 응답은 다음과 같고

$$y_i(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = e^{-2t} e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-t} - e^{-2t} \tag{C4.34}$$

전체 시스템 응답은 다음으로 주어진다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = [2e^{-2t}] + [e^{-t} - e^{-2t}] = e^{-2t} + e^{-t} \tag{C4.35}$$

만약 시스템의 동작 환경이 바뀌어 입력 $x(t) = 5e^{-t}$ 가 인가된다고 하자. 초기조건은 여전히 $y(0^-) = 2$ 일 때 시스템 응답을 구해보면, $x(t) = 5e^{-t}$ 에 대한 영상태 응답은 다음과 같이 되므로

$$y_i(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 5e^{-\tau} d\tau = 5[e^{-t} - e^{-2t}] \tag{C4.36}$$

전체 시스템 응답은 다음으로 주어진다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = [2e^{-2t}] + 5[e^{-t} - e^{-2t}] = -3e^{-2t} + 5e^{-t} \quad (C4.37)$$

이 결과에서 볼 수 있듯이 식 (C4.37)의 시스템 응답은 식 (C4.35)의 시스템 응답의 5배와 같지 않으므로 선형성 중의 동차성을 만족하지 않는다. 왜 이런 결과가 나온 걸까? 식 (C4.36)과 식 (C4.34)에서 볼 수 있듯이 입력이 5배 커짐에 따라 영상태 응답은 5배 커져서 동차성을 만족시키지만, 식 (C4.35)와 식 (C4.37)에서 보면 영입력 응답이 변하지 않아 전체적으로 동차성을 충족시키지 못함을 알 수 있다. 따라서 동차성을 만족시키기 위해서는 영입력 응답도 같은 정도로 변하게 해야 하는데, 이것은 초기조건을 그만큼 변화시키면 가능하다는 것을 잘 알 것이다.

그러므로 초기조건을 바꾸어 $y(0^-) = 10$ 을 $y_s(t) = ce^{-2t}$ 에 대입하면 $c = 10$ 이 얻어진다. 따라서 영입력 응답은 $y_s(t) = 10e^{-2t}$ 이 되어 정확히 $y(0) = 2$ 일 때의 영입력 응답의 5배가 되므로 시스템의 전체 응답은 다음과 같이 동차성을 만족시키게 된다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = 5[2e^{-2t}] + 5[e^{-t} - e^{-2t}] = 5[e^{-2t} + e^{-t}] \quad (C4.38)$$

이번엔 가산성의 경우에 대해 살펴보자. 만일 초기조건이 $y(0^-) = 1$ 인 경우에 입력 $x(t) = \sin t$ 를 인가하였다고 하자. 이때 영입력 응답은 $y_s(t) = e^{-2t}$ 가 되고 영상태 응답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin \tau d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \sin \tau d\tau \\ &= e^{-2t} \left((2e^{2\tau} \sin \tau - e^{2\tau} \cos \tau) \Big|_0^t - \int_0^t 4e^{2\tau} \sin \tau d\tau \right) \end{aligned}$$

위 식에서 부분 적분에 의한 \sin 항 적분의 값은 다음과 같이 되므로

$$\int_0^t e^{2\tau} \sin \tau d\tau = \frac{1}{5} (2e^{2\tau} \sin \tau - e^{2\tau} \cos \tau) \Big|_0^t = \frac{1}{5} (2e^{2t} \sin t - e^{2t} \cos t + 1)$$

영상태 응답은

$$y_i(t) = \frac{1}{5} (2\sin t - \cos t + e^{-2t}) \quad (C4.39)$$

로 주어지고, 시스템의 전체 응답은 다음과 같다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = e^{-2t} + \frac{1}{5} (2\sin t - \cos t + e^{-2t}) \quad (C4.40)$$

이제 초기조건은 $y(0^-) = 2$ 로 그대로 둔 채, 입력 $x(t) = e^{-t} + \sin t$ 를 인가할 경우의 시스

템 응답을 구해 보자. 초기조건과 시스템 방정식이 바뀌지 않았으므로 영입력 응답은 그대로이고, 영상태 응답은 다음과 같이 된다.

$$y_i(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}(e^{-\tau} + \sin\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin\tau d\tau$$

위 식의 영상태 응답은 입력 $x(t) = e^{-t}$ 와 $x(t) = \sin t$ 에 대한 각각의 영상태 응답의 합이므로 다음과 같이 된다.

$$y_i(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] + [\frac{1}{5}(2\sin t - \cos t + e^{-2t})] \quad (C4.41)$$

따라서 전체 시스템 응답은 다음과 같다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = 2e^{-2t} + [e^{-t} - e^{-2t}] + [\frac{1}{5}(2\sin t - \cos t + e^{-2t})] \quad (C4.42)$$

식 (C4.42)는 식 (C4.35)와 식 (C4.40)을 더한 값과 일치하지 않는다. 다시 말해 가산성을 만족하지 않는다. 식 (C4.41)에서 볼 수 있듯이, 영상태 응답 성분은 동차성의 경우와 마찬가지로 가산성을 만족하고 있으나, 식 (C4.42)에서 알 수 있는 것처럼 영입력 응답 성분이 두 번째 입력에 대한 출력 계산시의 초기조건 $y(0^-) = 1$ 에 대응되는 값만큼 부족하기 때문에 전체적으로 가산성이 만족되지 못함을 알 수 있다. 따라서 이를 해결하기 위해서는 각각의 입력의 경우에 대한 초기조건을 더해서 영입력 응답을 구하면 될 것이다. 이에 따라 초기조건을 $y(0^-) = 3$ 으로 하여 영입력 응답을 구하면 $y_0(t) = 3e^{-2t}$ 가 되므로 이번에는 전체 응답은 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} y(t) &= 3e^{-2t} + [e^{-t} - e^{-2t}] + [\frac{1}{5}(2\sin t - \cos t + e^{-2t})] \\ &= [e^{-t} + e^{-2t}] + [e^{-2t} + \frac{1}{5}(2\sin t - \cos t + e^{-2t})] \end{aligned} \quad (C4.43)$$

식 (C4.43)은 정확히 $x(t) = e^{-t}$ 와 $x(t) = \sin t$ 각각에 대한 응답의 합이므로 가산성이 만족된다.

이상의 결과에서 볼 수 있듯이 동차성은 초기조건을 입력의 변화만큼 척도조절해야, 그리고 가산성은 각 입력의 경우에 대한 초기조건을 더한 값을 사용해야 만족되어, 비로소 동일한 미분방정식으로 선형성을 훼손하지 않고 동일한 시스템을 나타낼 수 있게 된다. 그리고 이 모든 상황의 배경에는 영입력 응답 성분이 연관되어 있다. ■

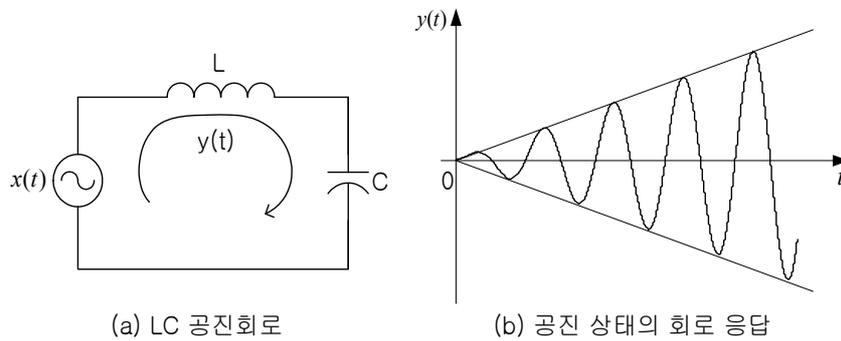
위의 예에서 본 것처럼, 초기조건이 0이 아닌 경우에는 영입력 응답 때문에 미분방정식이 항상 시스템의 선형성을 보장할 수 없게 된다. 뒤집어 얘기하면 초기조건이 0이라면 상수계수 선형 상미분 방정식은 항상 선형시스템을 표현하는 수학적 모델이 된다. 이렇게 모든 초

기조건이 0인 상태를 초기 휴지^{initially at rest}라고 부른다. 이를 수학적으로 표현하면, 시간 $t=t_0$ 이전의 입력이 0일 때, 출력 및 그 도함수들이 $t=t_0^-$ 에서 모두 0이면 그 시스템은 초기 휴지 상태라고 한다. 즉 $x(t)=0, t < t_0$ 일 때 $y^{(n-1)}(t_0^-)=\dots=y(t_0^-)=0$ 이면 시스템은 초기 휴지이다.

시스템 모드와 공진

시스템 모드의 중요성을 보여줄 수 있는 사실들 중의 하나가 공진 현상이다. [그림 C4-11(a)]의 LC 회로를 가지고 이를 살펴보자. 키르히호프의 전압 법칙(KVL)을 적용해 회로 방정식을 구한 뒤 미분방정식으로 바꾸면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{L} \frac{dx(t)}{dt} \quad (C4.44)$$



[그림 C4-11] LC 회로의 공진 현상

이의 특성방정식은 $\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$, 특성근은 $\lambda = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_r$ 이 된다. 따라서 이 회로의 시스템 모드는 $e^{\pm j\omega_r t}$ 이고 동차해는 다음과 같다.

$$y_h(t) = c_1 e^{j\omega_r t} + c_2 e^{-j\omega_r t} \quad (C4.45)$$

이 회로에 시스템 모드와 같은 형태를 갖는 정현파 $2\sin\omega_r t = (-j)(e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t})$ 을 입력으로 인가했을 때의 출력, 즉 영상태 응답을 구해보자. 입력이 시스템 모드와 같으므로 특이해를 $y_p(t) = \alpha t(e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t})$ 라 두고 식 (C4.44)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$j2\omega_r \alpha (e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t}) - \omega_r^2 \alpha t (e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t}) + \frac{1}{LC} \alpha t (e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t}) = \omega_r (e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t}) \quad (C4.46)$$

식 (C4.46)의 양변을 비교하면 $\alpha = \frac{1}{j2}$ 를 얻는다. 따라서 특이해는 다음과 같이 된다.

$$y_p(t) = \frac{1}{j2} t (e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t}) = t \sin \omega_r t \quad (C4.47)$$

따라서 미분방정식의 해와 이의 미분은 다음과 같다.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{j\omega_r t} + c_2 e^{-j\omega_r t} + t \sin \omega_r t \quad (C4.48)$$

$$\dot{y}(t) = j\omega_r (c_1 e^{j\omega_r t} - c_2 e^{-j\omega_r t}) + \sin \omega_r t + t \cos \omega_r t \quad (C4.49)$$

초기 조건은 모두 0이므로 식 (C4.48)과 식 (C4.49)에 대입하여 정리하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ j\omega_r (c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \quad (C4.50)$$

이로부터 $c_1 = c_2 = 0$ 을 얻으므로 미분방정식의 해, 즉 회로 출력은 다음과 같이 구해진다.

$$y(t) = t \sin \omega_r(t) \quad (C4.51)$$

따라서 시스템 응답은 시간에 따라 선형적으로 증가하여 [그림 C4-11(b)]에 보인 것처럼 결국 ∞ 에 도달한다. 즉 시스템 모드와 같은 형태(같은 주파수)를 갖는 정현파 입력에 대해 공진이 발생한다. 이로부터 LC 회로의 공진 주파수가 특성근에 의해 결정됨을 알 수 있다.

이상에서 살펴 본 것처럼, 시스템 입력이 시스템 모드와 일치할 때 공진 현상이 발생하고 LC 회로와 같이 에너지 소모 요소(전기회로에서는 저항 R)가 없는 시스템의 경우에는 시간이 지남에 따라 시스템의 응답을 무한대로 만든다.

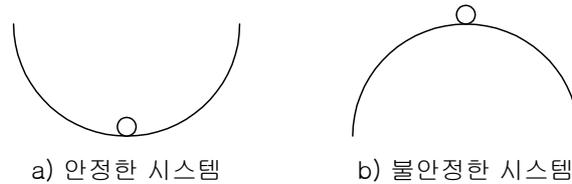
이러한 공진 현상은 경우에 따라서 유용하게 쓰일 수도 있고 문제를 일으킬 수도 있다. 라디오 채널의 선국과 같은 경우는 공진회로가 주파수 선택적으로 작용하여 유용하게 쓰이는 경우이지만 기계시스템이나 구조물 같은 경우는 강력한 진동에 의한 파괴(또는 붕괴)가 일어날 수 있다. 따라서 설계시에 시스템의 시스템 모드(특성근)와 공진 주파수에 대한 고려가 충분히 이루어져야 한다.

시스템 모드와 점근적 안정도

시스템의 안정도에는 BIBO 안정도 외에 널리 쓰이는 개념으로 **점근적 안정도** asymptotic stability 라는 것이 있다. 점근적 안정도는 시스템의 평형 상태와 관련하여 정의된다. 시스템의 평형 상태란 외부에서 시스템을 여기exciting하는 입력이 인가되지 않을 때 시스템이 지속적으로 유지하게 되는 특정한 상태를 말한다. 예를 들어 삼각형의 경우 꼭짓점을 바닥에 대고 거꾸로 세우면 손가락으로 받쳐주지 않는 한 넘어져서 한 번이 바닥에 대이면 더 이상 움직이지 않게 된다. 이 상태가 평형 상태이며 여러분도 알고 있듯이 삼각형의 가장 안정한 자세이다. 이처럼 시간이 지남에 따라 시스템이 특정한 상태에서 평형 상태로 될 때 그 시스템은 점근

적 안정이라고 한다.

[그림 C4-12]의 경우를 생각해보자. 그림 (a)는 반구모양의 그릇을 바로 놓은 경우이고, 그림 (b)는 엎어놓은 경우로서 여기에 구슬을 잘 놓아서 움직이지 않고 있다고 하자(즉, 평형 상태에 있다). 이제 구슬을 밀면 어떤 결과가 나오겠는가? 그림 (a)의 경우는 구슬이 움직이다가 결국에는 원래의 자리에 서게 된다. 반면, 그림 (b)의 구슬은 그릇 곡면을 타고 굴러 떨어져버린다. 다시 말해 (a)의 경우는 점근적 안정이다. (b)의 경우는 점근적 불안정이다.



[그림 C4-12] 점근적 안정도의 예

그렇다면 시스템에 특정한 초기조건을 인가하였을 때 시스템이 돌아가게 될 평형상태는 만약 존재한다면 무엇인가? 입력이 인가되지 않는 경우 시스템의 응답은 영입력 응답뿐이며, 이것은 시스템 모드 항들로 이루어져 있음을 우리는 알고 있다. 그런데 시스템 모드 항들은 지수함수 형태이므로 다음과 같이 특성근의 값에 의해 시간이 지남에 따라 감소하거나 증가하는 두 가지 양상을 보인다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = \begin{cases} 0, & Re(\lambda_i) < 0 \\ \infty, & Re(\lambda_i) > 0 \end{cases} \quad (C4.52)$$

둘 중 충분한 시간이 지난 뒤에 값이 변하지 않게 되는 것은 지수적으로 감소하는 경우로서 최종적인 값은 0이 된다. 즉 시스템의 평형상태는 영상태이다. 따라서 시스템의 점근적 안정도는 $t \rightarrow \infty$ 로 접근함에 따라 시스템이 영상태로 가는 성질을 말하며, 이를 위한 조건은 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $Re(\lambda_i) < 0$ 이어야 한다. 반면에 $Re(\lambda_i) > 0$ 의 경우는 $t \rightarrow \infty$ 로 접근함에 따라 시스템 응답은 계속 증가하게 되어 불안정해진다.

$Re(\lambda_i) = 0$ 의 경우에는 앞서서도 살펴본 것처럼 순허근의 경우로 공액으로 존재하므로 시스템 모드 항을 정리하면 정현 함수가 되어 0으로도 ∞ 로도 접근하지 않고 지속적으로 진동하게 되는, 일종의 안정과 불안정의 경계 상태가 된다. 이를 경우를 임계적 안정 marginally stable 상태에 있다고 한다.