제 3 장

기본적인 신호와 연산

책의 ‘1절 기본적인 연속 신호’와 관련하여 책에서 다룬 신호의 분류 중 일부에 대해 상세한 보충 설명과 예제를 추가하였다.

책의 ‘2절 기본적인 이산 신호’와 관련해서는 임펄스 신호와 계단 신호를 이용한 신호의 표현 예를 추가하였고, 이산 정현파 신호의 주기성에 대한 설명을 보충하였다.

책의 ‘3절 신호에 대한 기본 연산’과 관련해서는 연산의 조합에 의한 신호 표현 관련 예제들을 추가하였다.

3.1 기본적인 연속 신호

3.1.1 (단위) 계단 함수

계단 신호나 사각 펄스와 같이 불연속점을 가지는 신호의 불연속점에서의 값은 일반적으로 정의되지 않는다. 그렇지만 필요할 경우 왼쪽이나 오른쪽 경계의 값 또는 두 경계 값의 평균으로 나타내기도 하는데, 수학적으로 아주 특별한 경우를 제외하면 어떻게 나타내더라도 큰 문제가 없다.
예를 들어, 단위 계단 함수는 (책)식 (3.1) 외에 문헌에 따라 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{C3.1a}$$

$$u(t)=\begin{cases}1, & t> 0\\ 0, & t\le 0\end{cases} \tag{C3.1b}$$

$$u(t)=\begin{cases}1, & t> 0\\ \frac{1}{2}, & t=0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{C3.1c}$$

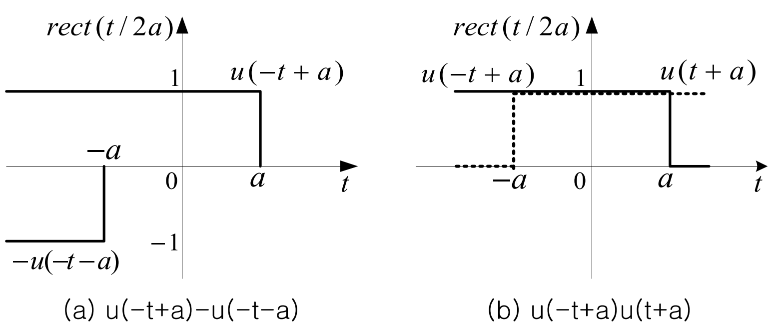
3.1.2 사각 펄스 함수

단위 사각 펄스는 폭과 크기, 그리고 면적이 모두 1인 사각 펄스로서 다음과 같이 된다.

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1, & |t|<1/2\\ 0, & |t|>1/2\end{cases} \tag{C3.2}$$

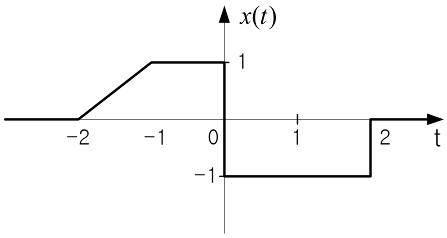
사각 펄스 함수는 (책)[그림 3-3(b)]에 나타낸 것 외에도 [그림 C3-1]처럼 계단 함수를 이용하여 나타낼 수 있으며, 이들을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathrm{rect}(t/2a)=u(-t+a)-u(-t-a)=u(t+a)u(-t+a) \tag{C3.3}$$

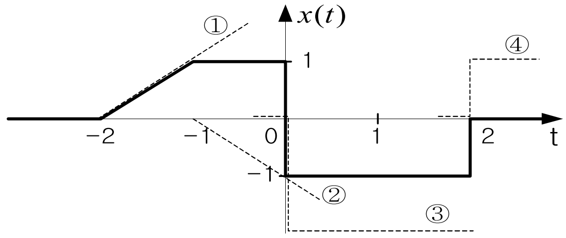


[그림 C3-1] 사각 펄스의 여러 가지 표현

■ 예제 C3-1 : *사각 펄스(계단 함수)를 이용한 구간 연속 신호의 표현*
[그림 C3-2]에 나타낸 신호 $x(t)$의 사각 펄스(계단 함수)를 이용한 수식 표현을 구해보자.



[그림 C3-2] [예제 C3-1]의 신호



[그림 C3-3] 4개 신호의 합으로 표현된 신호

구간별로 다른 파형이나 불연속점을 갖는 구간 연속 신호의 경우, (책)[예제 3-3]에서 살펴본 것처럼 사각 펄스가 신호 성분을 뽑아내는 기능을 이용하여 쉽게 수식 표현을 구할 수 있다. $x(t)$는 파형이 다른 구간별로 나누어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \le t < -1 \\ 1, & -1 \le t < 0 \\ -1, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

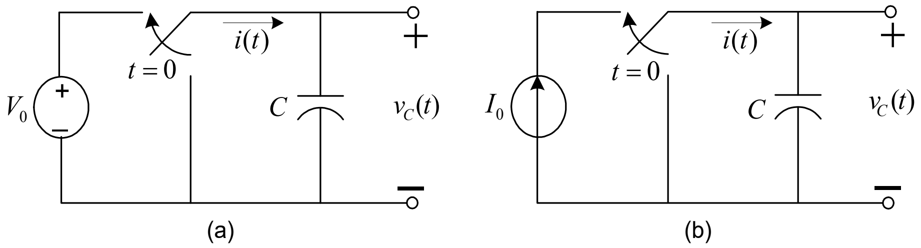
따라서 구간별로 사각 펄스를 이용하여 나타낸 것들을 모두 더하면 다음과 같이 $x(t)$의 수식 표현을 얻을 수 있는데, 신호의 수식이 결과적으로 계단 함수에 의해 표현됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= (t+2)[u(t+2)-u(t+1)] + [u(t+1)-u(t)] + (-1)[u(t)-u(t-2)] \\ &= \underbrace{(t+2)u(t+2)}_{①} \ \underbrace{-(t+1)u(t+1)}_{②} \ \underbrace{-2u(t)}_{③} \ \underbrace{+u(t-2)}_{④} \end{aligned}$$

위의 수식 표현은 4개의 신호의 합으로 되어 있음을 볼 수 있는데, 이를 그림으로 나타낸 것이 [그림 C3-3]이다. ■

3.1.4 (단위) 임펄스 함수

■ 예제 C3-2 : *직류 전원에 대한 커패시터 회로의 동작*
[그림 C3-4]와 같이 저항이 0인 커패시터만으로 이루어진 간단한 이상적인 전기 회로에 $t=0$ 순간에 직류 전원, 즉 계단 함수를 인가할 때 회로의 동작을 살펴보자. 물리적으로는 일어날 수 없는 비현실적인 예이지만, 이를 통해 임펄스 함수, 계단 함수, 그리고 램프 함수의 상호 관계를 쉽게 이해할 수 있을 것이다.



[그림 C3-4] **커패시터 회로**

먼저 [그림 C3-4(a)]는 입력이 직류 전압(V_0)인 경우로, $t=0$에서 스위치가 전원 쪽으로 연결되는 즉시 커패시터 양단에 걸리는 전압 $v_c(t)$가 V_0와 같아진다. 즉 $v_c(t)=V_0u(t)$가 되므로 커패시터에 흐르는 전류는 다음과 같이 된다.

$$i(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=CV_0\frac{du(t)}{dt}=CV_0\delta(t)$$

이 결과는 회로에 무한대 크기의 전류가 순간적으로 흘러 커패시터를 단숨에 충전시켜 출력 전압이 계속 V_0로 유지됨을 보여준다. 다음으로 [그림 C3-4(b)]는 직류 전류(I_0)를 입력으로 인가한 경우로, $t=0$에서 스위치를 연결하는 순간 커패시터에 흐르는 전류 $i(t)$가 전원 전류 I_0와 같아진다. 즉 $i(t)=I_0u(t)$가 되므로 커패시터 양단에 걸리는 전압은 다음과 같이 된다.

$$v_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(t)\,dt=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}I_0u(t)\,dt=\frac{I_0}{C}r(t)$$

이는 커패시터가 지속해서 일정하게 공급되는 입력 전류에 의해 (이론적으로는) 무한정으로 충전될 수 있음을 보여준다. ■

3.1.5 지수 함수

■ 예제 C3-3 : *오일러 공식을 이용한 복소 지수 함수의 표현*

복소 지수 함수 $x(t)=(1+j\sqrt{3})e^{\left(-2+j\frac{\pi}{4}\right)t}$를 삼각 함수 형태로 표현해보자.

계수 $A=1+j\sqrt{3}$을 극좌표 형태로 나타내면 $A=1+j\sqrt{3}=2e^{j\frac{\pi}{3}}$이 된다.

$$|A|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad \phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$$

따라서 $x(t)$의 삼각 함수 형태 표현은 다음과 같이 구해진다.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2e^{j\frac{\pi}{3}} e^{\left(-2+j\frac{\pi}{4}\right)t} = 2e^{-2t} e^{j\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= 2e^{-2t}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)\right]
\end{aligned}
$$

■

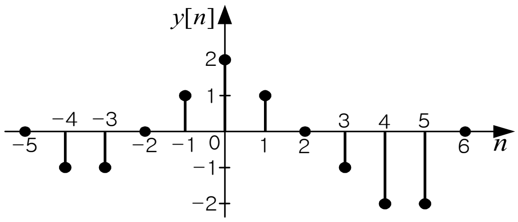
3.2 기본적인 이산 신호

3.1절에서 살펴본 대부분의 기본적인 연속 신호를 샘플링하면 기본적인 이산 신호가 된다. 두 종류 상이의 특별한 차이라고 하자면 임펄스 신호가 매우 단순한 신호가 된다는 점과 정현파 신호가 항상 주기 신호가 되는 것은 아니라는 정도이다. 그러므로 책에서도 중복을 피하고 설명이 필요한 내용들만 제시한 것이다.

기본 신호들은 시스템을 해석하는 데 큰 역할을 할 뿐만 아니라 이들의 결합으로 다양하고 더 복잡한 신호를 나타낼 수 있게 해준다.

3.2.2 이산 (단위) 계단 함수

■ 예제 C3-4 : *임펄스 신호와 계단 신호를 이용한 신호 표현*
[그림 C3-5]에 주어진 이산 신호를 임펄스 신호와 계단 신호를 이용하여 나타내보자.



[그림 C3-5] [예제 C3-4]의 신호 y[n]

임펄스 신호를 이용한 신호 표현은 신호를 각각의 시간 성분으로 쪼갠 뒤에 (책)식 (3.28)에 해당 시간의 신호 샘플 값을 대입하면 되므로

$$\begin{aligned} y[n] =& -\delta[n+4]-\delta[n+3]+\delta[n+1]+2\delta[n] \\ &+\delta[n-1]-\delta[n-3]-2\delta[n-4]-2\delta[n-5] \end{aligned}$$

계단 신호를 이용하여 신호를 나타내기 위하여 $y[n]$을 같은 함수 꼴로 표현될 수 있는 성분들로 나누면, ① 2개의 샘플로 이루어진 크기 -1인 사각형 펄스($-4 \le n \le -3$) ② 3개의 샘플로 된 기울기 1인 램프 신호($-2 \le n \le 0$) ③ 3개의 샘플로 된 기울기 -1인 램프 신호($1 \le n \le 3$) ④ 샘플 2개로 구성된 크기 -2인 사각형 펄스($4 \le n \le 5$)의 4개로 쪼갤 수 있다. 따라서 계단 신호를 이용한 표현은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= -\{u[n+4]-u[n+2]\}+(n+2)\{u[n+2]-u[n-1]\} \\ &\quad -(n-2)\{u[n-1]-u[n-4]\}-2\{u[n-4]-u[n-6]\} \\ &= -u[n+4]+(n+3)u[n+2]-2nu[n-1]+(n-4)u[n-4]+2u[n-6] \end{aligned}$$

신호를 어떻게 쪼개느냐에 따라 계단 신호를 이용한 표현은 달라질 수 있다. $y[n]$을 ① 크기 -1인 임펄스 신호($n=-4$) ② 샘플 3개로 된 기울기 1인 램프 신호($-3 \le n \le -1$) ③ 5개의 샘플로 된 기울기 -1인 램프 신호($0 \le n \le 4$) ④ 크기 -2인 임펄스 신호($n=5$)로 쪼갤 수도 있다. 이 경우의 신호 표현은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= -\{u[n+4]-u[n+3]\}+(n+2)\{u[n+3]-u[n]\} \\ &\qquad -(n-2)\{u[n]-u[n-5]\}-2\{u[n-5]-u[n-6]\} \\ &= -u[n+4]+(n+3)u[n+3]-2nu[n]+(n-4)u[n-5]+2u[n-6] \end{aligned}$$

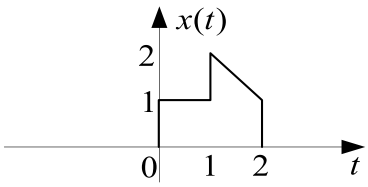
표현식이 바르게 구해졌는지 확인해 보려면 시간 변수 n에 적당한 값을 대입하여 그림의 신호와 값이 일치하는지를 따져보면 된다. ■

3.3 신호에 대한 기본 연산

3.3.3 연산의 조합에 의한 신호의 표현

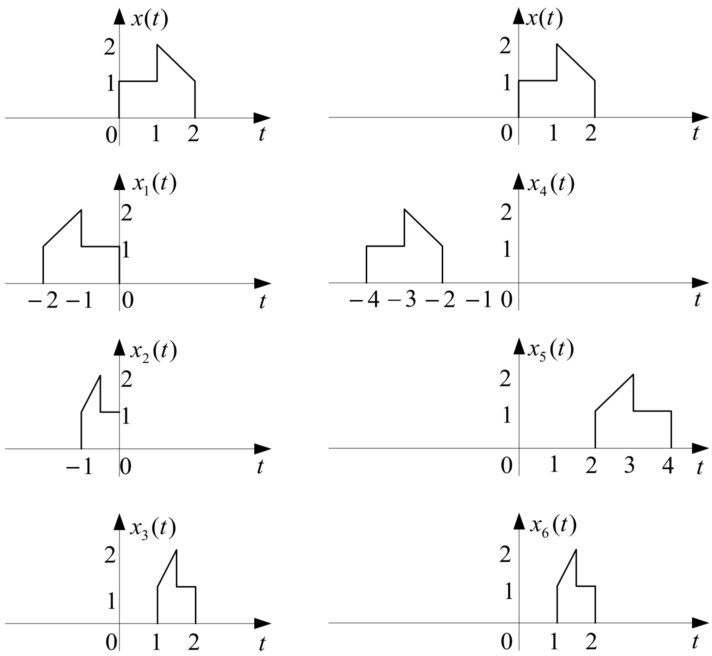
■ 예제 C3-5 : *연속 신호에 대한 기본 연산의 조합*

[그림 C3-6]의 신호 $x(t)$에 대해 $y(t)=x(-2t+4)$를 구하여 그려보자.



[그림 C3-6] [예제 C3-5]의 신호

$y(t)$는 $y(t)=x(-2(t-2))$ 또는 $y(t)=x(2(-t)+4)$로 나타낼 수 있다. 앞의 경우는 시간에 대해 반전-척도 조절-이동의 순서로 $x(t)$에 기본 연산을 적용한 것이다. [그림 C3-7(a)]에 보인 것처럼, 먼저 반전에 의해 반사 신호 $x_1(t)=x(-t)$를 구한 뒤 이를 척도 조절하여 $x_2(t)=x_1(2t)$를 얻고 끝으로 $x_2(t)$를 이동(2만큼 지연)시켜 $x_3(t)=x_2(t-2)$를 얻음으로써 $y(t)$를 구한 것이다. 반면에, 뒤의 경우는 [그림 C3-7(b)]와 같이 시간에 대해 이동-반전-척도 변화의 순서로 연산을 적용한 것으로, 먼저 $x(t)$를 이동(4만큼 앞섬)시켜 $x_4(t)=x(t+4)$를 구한 뒤에 이를 반전시켜 $x_5(t)=x_4(-t)$를 얻고 끝으로 $x_5(t)$를 척도 조절하여 $x_6(t)=x_5(2t)$를 얻음으로써 $y(t)$를 구한다. 즉 y(t)를 얻게 된다.



(a) 반사-척도 조절-이동 (b) 이동-반사-척도 조절

[그림 C3-7] 기본 연산의 조합에 의한 연속 신호 얻기

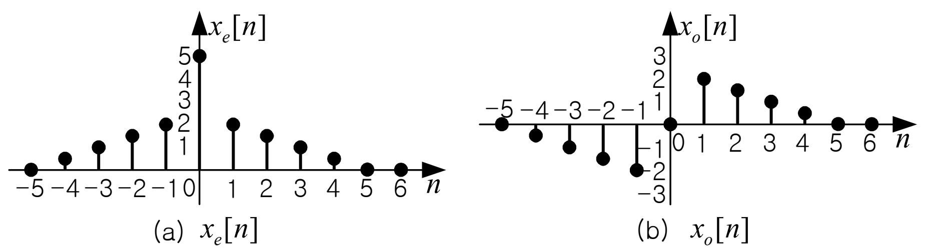
(b)를 (a)와 비교하면 시간 이동 연산의 순서가 달라짐에 따라 시간 이동 값이 달라진 것을 확인할 수 있다. ■

■ **예제 C3-6** : *(책)[예제3-16] 보충 – 우대칭 성분과 기대칭 성분*

(책)[그림 3-41]의 $x[n]$에 대해 우대칭 성분 $x_e[n]$과 기대칭 성분 $x_o[n]$을 구해 그려보자.

우대칭 성분은 $x_e[n] = \dfrac{x[n]+x[-n]}{2}$ 이므로 $x[n]$에 대해 '시간 반전($x[-n]$)→합($x[n]+x[-n]$)→진폭 척도조절($\{x[n]+x[-n]\}/2$)' 순으로 기본 연산을 적용하면 된다.
기대칭 성분은 $x_o[n] = \dfrac{x[n]-x[-n]}{2}$ 이므로 '시간 반전($x[-n]$)→진폭 반전($-x[-n]$)→합($x[n]-x[-n]$)→진폭 척도조절($\{x[n]-x[-n]\}/2$)' 순으로 연산을 적용하여 얻을 수 있다.

[그림 C3-8]은 이렇게 구해진 $x[n]$의 우대칭 및 기대칭 성분이다.



[그림 C3-8] 신호의 우대칭 성분과 기대칭 성분

■