제 8 장

연속 시간 푸리에 변환

책의 '1절 푸리에 변환의 개요'와 관련하여 주기 신호의 푸리에 변환과 같은 파형을 갖는 비주기 신호의 푸리에 변환의 관계를 책과 다른 방법으로 유도하는 과정을 보였다.

책의 '3절 푸리에 변환의 성질'과 관련하여 시간-주파수 쌍대성에 대한 보충 설명과 시간 척도조절과 관련한 대역폭 곱과 불확정성 원리에 대한 설명을 추가하였다. 또한 파스발 정리의 유용성을 보여주는 예제를 추가하였다.

책의 '4절 주파수 응답과 시스템 해석'과 관련하여 주파수 응답을 이용하여 시스템 출력을 구하는 방법의 이해를 돕기 위하여 예제를 보충하였다.

연속 신호의 푸리에 해석을 통하여 푸리에 해석과 신호 및 시스템의 주파수 영역 취급에 대해 개념을 제대로 확립하면, 11장 이후에 소개되는 이산 시간 푸리에 해석은 어려울 게 없으므로 책과 심화 학습 자료를 이용해 잘 익혀두기 바란다.

8.1 푸리에 변환의 개요

8.1.3 주기 신호의 푸리에 변환

(책)식 (8.10)에 주어진 주기 신호 $x_T(t)$의 푸리에 변환 $X_T(\omega)$와 이 주기 신호의 한 주기 파형을 갖는 비주기 신호 $x(t)$의 푸리에 변환 $X(\omega)$의 관계를 책과는 다른 방법으로 이끌어 낼 수도 있다.

비주기 신호 $x(t)$와 주기 신호 $x_T(t)$의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \begin{cases} x_T(t), & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \tag{C8.1}$$

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-kT) \\ &= x(t) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \right) = x(t) * p(t) \end{aligned} \tag{C8.2}$$

즉, 주기 신호는 비주기 신호 $x(t)$와 주기 간격으로 반복되는 무한 임펄스 열 $p(t)$와의 컨벌루션으로 표현할 수 있다. 그러면 푸리에 변환의 시간 컨벌루션 성질에 의해 주기 신호 $x_T(t)$의 푸리에 변환 $X_T(\omega)$는 다음과 같이 된다.

$$X_T(\omega) = X(\omega)P(\omega) \tag{C8.3}$$

임펄스 열의 푸리에 변환은 (책)[예제 8-4]에서 이미 다음과 같이 구한 바 있다.

$$P(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \tag{C8.4}$$

식 (C8.4)를 식 (C8.3)에 대입하여 정리하면 $X_T(\omega)$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= X(\omega)P(\omega) = X(\omega)\left(\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \right) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)\delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \tag{C8.5}$$

식 (C8.5)는 (책)식 (8.10)과 일치한다.

8.3 푸리에 변환의 성질

8.3.1 시간-주파수 쌍대성

시스템을 모형화한 수식에서 서로 맞서는 변수(물리량)와 파라미터들을 맞바꾸었을 때 여전히 수식이 성립하면 두 시스템은 쌍대라고 하는데, 심화학습 자료 5장에서 설명했던 전기회로의 RLC 직렬회로와 병렬회로, 역학에서 병진 운동과 회전 운동 등은 쌍대를 이루는 표적인 예이다. 5장과 6장에서 살펴보았던 전치 관계인 시스템 구현도들도 상태 방정식으로 나타내면 쌍대 관계가 된다.

시간-주파수 쌍대성에 의하면, 변수의 부호와 2π 요소만 제외하면 $x(t)$와 $X(\omega)$가 서로 역할을 맞바꾸어도 둘의 관계는 변하지 않는다. 이것은 (적절한 비유가 될는지 모르겠지만) 월급쟁이 남편과 전업 주부인 한 부부가 남편이 실직하여 아내가 직장을 다니고 남편이 집안일을 돌보게 되었다면, 남편과 아내의 역할이 거꾸로 달라지긴 했어도 여전히 부부라는 사실은 변함이 없는 것과 같다.

푸리에 급수의 경우 주파수 분석식은 적분, 주파수 합성식은 총합 연산이므로 엄격한 수학적 시간-주파수 쌍대성은 성립될 수 없다. 하지만 개념적으로는 쌍대성이 유효하다.

8.3.5 시간 척도조절

<Tip & Note> (지속)시간 : 대역폭 곱과 불확정성 원리

푸리에 변환의 시간 척도조절 성질은 시간 영역에서 신호의 길이와 주파수 영역에서 신호 스펙트럼의 대역폭이 역비례 관계임을 보여준다. 이에 따르면, 신호의 길이 T와 대역폭 B를 동시에 줄이는 것은 불가능하며, (지속)시간-대역폭 곱은 $TB \geq C$ (C는 상수)와 같이 최저값이 제한된다. 이 사실은 마치 양자역학에서 입자의 운동량과 위치를 동시에 정확히 알 수 없다는 하이젠베르그(Heisenberg)의 **불확정성 원리**(uncertainty principle)와 같은 프레임이다. 따라서 이를 푸리에 해석의 불확정성 원리라고 하며, 신호 처리나 통신 시스템의 설계 등에서 활용된다.

불확정성 원리를 아주 간단히 설명하자면, 하나의 대상에 서로 다른 두 유형의 정보가 함께 존재할 때 두 가지 정보의 내용은 확정되어 있지 않으며, 두 정보 중 하나를 더 잘 알게 될수록 다른 하나를 알 수 없게 된다는 것이다.

이러한 사실을 극단적으로 보여주는 신호의 예로 임펄스 신호와 정현파 신호를 들 수 있다. 신호의 에너지 관점에서, 임펄스 신호 $\delta(t-t_0)$는 시간 영역에서 $t=t_0$ 순간으로 에너지 위치를 정확히 확정할 수 있다. 그러나 주파수 영역에서 스펙트럼은 모든 주파수에 대해 상수로 에너지 위치를 특정하게 좁힐 수 없다. 즉 부정확성이 극대화된다. 이와 반대로 정현파

신호 $\cos(\omega_0 t)$는 시간 영역에서 전 시간 구간에 계속 진동하며 값이 변화하기 때문에 에너지 위치를 좁혀서 확정할 수 없지만, 주파수 영역에서는 스펙트럼이 ω_0에서만 존재하므로 에너지 위치를 정확하게 확정 가능해진다.

불확정성 원리를 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 예로 기타줄 튕기기가 있다. 기타줄 하나를 손가락으로 튕기면 띠잉~하는 맑은소리가 한참 동안 나지만, 기타줄을 튕기자마자 줄을 손가락으로 눌러 소리를 끊으면 아주 짧게 띠익! 하고 둔탁한 소리가 난다. 두 소리의 스펙트럼을 구해보면, 튕기기만 할 때는 대역폭이 아주 좁게 줄의 음계에 해당하는 특정 주파수만 생겨서 깨끗한 소리가 나는 데 반해, 급히 소리를 끊으면 주파수 대역이 늘어나면서 여러 주파수 성분이 섞여서 조화롭지 못한 둔탁한 소리가 들리게 되는 것이다.

8.3.13 파스발 정리

■ 예제 C8-1 : *파스발 정리에 의한 신호 에너지의 계산*

신호 $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$는 주파수 $-a \le \omega \le a$ 구간에 총 에너지의 몇 %가 몰려 있는지 구하라.

<풀이>

$x(t)$는 $t>0$과 $t<0$의 두 구간으로 나누어 $x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$로 나타낼 수 있다. $v(t) = e^{-at}u(t)$의 푸리에 변환을 $V(\omega)$라고 하면, 지수 신호의 푸리에 변환쌍 (책)식 (8.14)와 푸리에 변환의 선형성 및 시간 반전 성질에 의해 $x(t)$의 푸리에 변환은 다음과 같이 구해진다.

$$X(\omega) = V(\omega) + V(-\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

따라서 파스발 정리를 이용하여 다음과 같이 주파수 영역에서 에너지를 계산할 수 있다.

$$E = \frac{1}{2\pi}\int |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2} d\omega$$

위의 적분은 $\omega = a\tan\theta$로 치환하여 계산하면 다음과 같이 된다.

$$E = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int \frac{4a^3\sec^2\theta}{a^4\sec^4\theta} d\theta = \frac{4}{2\pi a}\int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{2\pi a}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{4}{4\pi a}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) = \frac{1}{\pi a}(\tan^{-1}\frac{\omega}{a} + \frac{a\omega}{a^2+\omega^2})$$

마지막 등식은 $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta = 2\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ 임을 이용한 것이다. 따라서 주어진 주파수 구간에서의 에너지는 다음과 같다.

$$E_{[-a,\ a]} = \frac{1}{\pi a}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{a} + \frac{a\omega}{a^2+\omega^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{\pi a}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)$$

총에너지는 $-\infty < \omega < \infty$에 대해서 계산하면 다음과 같으므로

$$E_{[-\infty,\ \infty]} = \frac{1}{\pi a}\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{a} + \frac{a\omega}{a^2+\omega^2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi a}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{a}$$

가 되고, 두 에너지의 비는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{E_{[-a,\ a]}}{E_{[-\infty,\ \infty]}} \times 100 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) \times 100 = 81.5\%$$

이처럼 파스발 정리로부터 특정 주파수 구간에 에너지가 얼마나 몰려 있는지 알 수 있다. 이는 신호의 분석, 근사화 등에 활용될 수 있는 유용한 정보로서 시간 영역에서는 알아내는 것이 불가능하다. ■

8.4 주파수 응답과 시스템 해석

8.4.2 주파수 응답을 이용한 시스템 출력의 결정

■ 예제 C8-2 : *주파수 응답을 이용한 시스템의 계단 응답*

임펄스 응답 $h(t)=e^{-at}u(t)$, $a>0$인 인과 LTI 시스템의 계단 응답을 구하라.

<풀이>

임펄스 응답과 입력의 푸리에 변환은 각각 $H(\omega)=H(\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$, $U(\omega)=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$이므로, 출력 스펙트럼 $Y(\omega)$는 다음과 같이 된다.

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)=\frac{1}{j\omega}H(j\omega)+\pi H(0)\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega(a+j\omega)}+\pi(\frac{1}{a})\delta(\omega)$$

$Y(\omega)$의 역변환을 구하기 위해 위 식의 우변의 첫 번째 항을 부분분수로 전개하면

$$\frac{1}{j\omega(a+j\omega)}=\frac{A}{j\omega}+\frac{B}{a+j\omega}$$

A를 구하기 위해 위 식의 양변에 $j\omega$를 곱하여 $\omega=0$을 대입하면

$$\left.\frac{1}{a+j\omega}\right|_{\omega=0}=\left.\left(A+\frac{j\omega B}{a+j\omega}\right)\right|_{\omega=0}$$

이므로, $A=1/a$를 얻는다. 같은 방법으로 양변에 $(a+j\omega)$를 곱하여 $\omega=ja$를 대입하면

$$\left.\frac{1}{j\omega}\right|_{\omega=ja}=\left.\left(\frac{A(a+j\omega)}{j\omega}+B\right)\right|_{\omega=ja}$$

이므로, $B=-1/a$을 얻는다. 따라서 $Y(\omega)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y(\omega)=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{a+j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a+j\omega}+\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)\right]$$

위 식 우변의 첫 번째 항은 실수 지수 신호의 푸리에 변환이고 두 번째 항은 단위 계단 신호의 푸리에 변환이므로 $Y(\omega)$의 역 변환은 다음과 같이 된다.

$$y(t)=\frac{1}{a}(-e^{-at}u(t)+u(t))=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

역변환의 계산 과정에서 계속 $j\omega$가 따라다니고 복소수 계산을 해야 하는 등 조금 번거로운 면이 있다. 다음 장에서 배우게 될 라플라스 변환을 이용하면 이런 불편함이 사라지게 되므로, 주파수 영역에서 시스템의 출력을 결정할 때에는 일반적으로 라플라스 변환을 선호한다. 라플라스 변환을 이용한 출력 결정은 (책)[그림 8-23]에서 푸리에 변환기들이 라플라스 변환기로 대체된 것과 같다. 이것은 어디까지나 이론적 해석일 때의 문제이고, 컴퓨터를 이용한 수치 해석에서는 고속 푸리에 변환을 이용해 (책)[그림 8-23]의 방법으로 문제를 해결한다. ■