제 6 장

이산 시스템의 시간 영역 해석

책의 '1절 이산 시스템의 차분 방정식 표현'과 관련하여 컴퓨터를 이용한 연속 시스템의 해석에 필요한 기법인 미분 방정식을 차분 방정식으로 근사화하는 오일러 근사화에 대한 설명을 추가하였다. 그리고 시스템의 직접형 구현도가 어떻게 얻어지는지 이해할 수 있도록 상세한 유도 과정에 대한 설명을 추가하였다.

책의 '2절 반복 대입법에 의한 차분 방정식 풀이'와 관련해서는 예제를 추가하여 구체적 방법과 그의 한계를 잘 이해할 수 있도록 하였다.

책의 '3절 차분 방정식의 고전적 해법'과 관련하여 흥미로운 예제들을 추가하여 이해를 돕도록 하였다.

6.1 이산 시스템의 차분 방정식 표현

6.1.1 이산 LTI 시스템의 차분 방정식 표현

(책)식 (6.1)의 차분 방정식과 관련하여 시간 지연 연산자를 시간 영역에서는 q^{-1}, 주파수 영역에서는 z^{-1}를 사용하여 나타낼 수 있다. 이는 미분 방정식에 대해 미분 연산자를 시간 영역에서 D, 주파수 영역에서 s를 사용하여 나타내는 것과 마찬가지이다. 시간 지연자를 사용하면 (책)식 (6.1)의 차분 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y[n] + a_1 q^{-1} y[n] + \cdots + a_p q^{-p} y[n] = b_0 x[n] + \cdots + b_p q^{-p} x[n] \tag{C6.1}$$

<Tip & Note> 제2 미분 방정식에서 차분 방정식으로 : 오일러Euler 근사화

다음과 같은 1차 미분 방정식으로 표현되는 연속 LTI 시스템을 생각해 보자.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \tag{C6.2}$$

미분에 대한 오일러 근사는 다음과 같으므로

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT+T) - y(nT)}{T} \tag{C6.3}$$

식 (C6.1)의 미분 방정식은 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\frac{y(nT+T) - y(nT)}{T} + ay(nT) = bx(nT) \tag{C6.4}$$

$y(nT) = y[n]$으로 나타내기로 하면, 위 식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & y[n+1] - (1-aT)y[n] = bTx[n] \\ \text{또는}\quad & y[n] + (1-aT)y[n-1] = bTx[n-1] \end{aligned} \tag{C6.5}$$

식 (C6.2)와 식 (C6.5)의 영입력 응답을 각각 구하면 다음과 같다.

$$y(t) = e^{-at} y(0) \tag{C6.6}$$

$$y[n] = (1-aT)^n y[0] \tag{C6.7}$$

그런데 $t = nT$일 때 지수 함수의 급수 전개가 다음과 같으므로

$$e^{-aT} = 1 - aT + \frac{(aT)^2}{2!} - \frac{(aT)^3}{3!} + \frac{(aT)^4}{4!} - \cdots \tag{C6.8}$$

T가 매우 작다는 오일러 근사의 전제 조건이 만족하면, 지수 함수의 급수 전개에서 2차 이상의 고차항을 무시할 수 있다. 따라서 $y[n] \simeq y(nT)$, 즉 식 (C6.7)의 $y[n]$이 식 (C6.6)의 $y(nT)$의 정확한 근사식이 된다.

실제로 컴퓨터를 이용하여 수치해석적으로 미분 방정식을 풀 때, 매트랩 실습 예제 [Matlab 5-2]에서 보았듯이 오일러 근사를 이용하여 차분 방정식으로 바꾼 뒤 반복 대입법을 이용한 프로그램을 작성하면 된다. 이때 근사과정에서 T를 빠뜨리거나 충분히 작게 설정하지 않으면 문제가 생기니 유의해야 한다.

6.1.2 이산 시스템의 표준형(직접형) 구현도

제2 직접형 구현도

제2 직접형을 얻는 과정은 연속 시스템의 제2 직접형을 끌어내는 과정과 동일하다. 우선 차분 방정식을 시간 지연 연산자 q^{-1}를 사용하여 나타낸 식 (C6.1)의 차분 방정식(이때 일반화를 위해 $p=q$)을 q^{-1}에 대한 대수 방정식처럼 취급하면, 중간 변수 $v[n]$를 도입하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

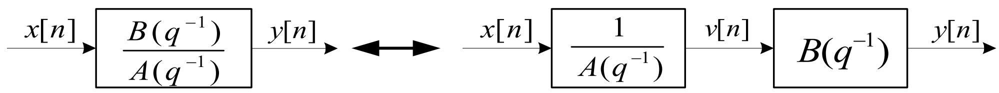
$$y[n] = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_p q^{-p}}{1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_p q^{-p}} x[n] = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} x[n] = B(q^{-1}) v[n] \tag{C6.9}$$

여기서 $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_p q^{-p}$, $B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_p q^{-p}$이다.

식 (C6.9)에서 $v[n] = \frac{1}{A(q^{-1})} x[n]$가 되는데, 이로부터 얻어진 $A(q^{-1}) v[n] = x[n]$를 $v[n]$에 관해 풀어서 정리하면 다음과 같이 된다.

$$v[n] = -a_1 q^{-1} v[n] - \cdots - a_p q^{-p} v[n] + x[n] \tag{C6.10}$$

결과적으로 식 (C6.1)의 차분 방정식을 두 개의 식으로 분리한 식 (C6.9)와 식 (C6.10)에 대해 시간 지연기를 공통으로 사용하여 구현하면 (책)[그림 6-2(b)]와 같은 새로운 구현도가 얻어지며 이를 **제2 직접형**이라고 한다. 연속 시스템의 경우와 마찬가지로 이산 시스템의 제2 직접형 구현도는 [그림 C6-1]과 같이 시스템을 두 개의 부시스템의 종속 연결로 간주하여 이를 구현한 것이다.



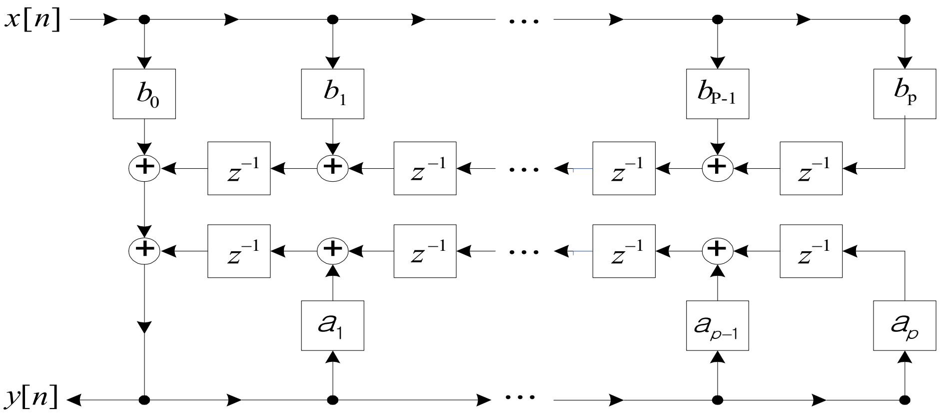
[그림 C6-1] 전치 제2 직접형 구현도를 위한 등가 시스템

전치 제2 직접형 구현도

연속 시스템의 제1 직접형을 구할 때처럼 식 (C6.1)의 차분 방정식을 같은 시간 지연을 갖는 항들끼리 묶어서 정리하면 다음과 같다.

$$y[n] = b_0 x[n] + q^{-1}(-a_1 y[n] + b_1 x[n]) + \cdots + q^{-p}(-a_p y[n] + b_p x[n]) \qquad \text{(C6.11)}$$

식 (C6.11)로부터 p개의 시간 지연기를 일렬로 연결하고 각 시간 지연기의 입력단에 곱셈기를 달아 상응하는 입력 및 출력 계수를 곱하여 더하게 되면 (책)[그림 6-2(c)]의 시스템 구현도가 얻어진다. 이는 (책)[그림 6-2(a)]의 제1 직접형 구현도를 아래의 [그림 C6-2]와 같이 시간 지연과 곱셈의 순서를 바꾼 뒤에 시간 지연기열을 공통으로 묶는 것과 같다.



[그림 C6-2] 제1 직접형에서 시간 지연과 곱셈 순서를 바꾼 구현도

6.2 반복 대입법에 의한 차분 방정식 풀이

■ 예제 C6-1 : *반복 대입법에 의한 차분 방정식의 풀이 - IIR 시스템*

다음의 차분 방정식을 $x[n] = n^2$, $y[-1] = 16$의 경우에 대해 반복적으로 풀어라.

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n]$$

<풀이>

이 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$$

위 식에서 $n=0$으로 놓으면 다음을 얻는다.

$$n=0 \ : \ y[0] = 0.5y[-1] + x[0] = 0.5(16) + 0 = 8$$

다음 $n=1$로 두고, 위에서 계산된 $y[0] = 8$과 $x[1] = 1^2 = 1$을 이용하면 다음을 얻는다.

$$n=1 \ : \ y[1] = 0.5y[0] + x[1] = 0.5(8) + 1^2 = 5$$

이 방법을 계속 반복하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} n=2: \ & y[2] = 0.5y[1] + x[2] = 0.5(5) + 2^2 = 6.5 \\ n=3: \ & y[3] = 0.5y[2] + x[3] = 0.5(6.5) + 3^2 = 12.25 \\ & \vdots \end{aligned}$$

■

■ 예제 C6-2 : *반복 대입법에 의한 차분 방정식의 풀이 - IIR 시스템*

다음 차분 방정식과 같은 인과 LTI 시스템의 임펄스 응답을 반복 대입법으로 구하라.

$$y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n]$$

<풀이>

임펄스 응답을 구하기 위해 $x[n] = \delta[n]$이라 두고, 차분 방정식을 다시 정리하면

$$h[n] = 4h[n-1] - 4h[n-2] + \delta[n]$$

인과 시스템이므로 $h[-1] = h[-2] = 0$이고, $n=0$부터 순차적으로 $h[n]$의 값을 구하면

$$n = 0\text{일 때, } h[0] = 4h[-1] - 4h[-2] + \delta[0] = 1 = 1 \times 2^0$$

$$n = 1\text{일 때, } h[1] = 4h[0] - 4h[-1] + \delta[1] = 4 = 2 \times 2^1$$
$$n = 2\text{일 때, } h[2] = 4h[1] - 4h[0] + \delta[2] = 12 = 3 \times 2^2$$
$$n = 3\text{일 때, } h[3] = 4h[2] - 4h[1] + \delta[3] = 32 = 4 \times 2^3$$
$$n = 4\text{일 때, } h[4] = 4h[3] - 4h[2] + \delta[4] = 80 = 5 \times 2^4$$
$$\vdots$$
$$n = k\text{일 때, } h[k] = 4h[k-1] - 4h[k-2] + \delta[k] = (1+k) \times 2^k$$
$$\vdots$$

위 식으로부터 임펄스 응답의 수열 및 닫힌 꼴 표현은 다음과 같이 된다.

$$h[n] = [\check{1},\ 4,\ 12,\ 32,\ 80,\ \cdots\ ]$$
$$h[n] = (1+n)2^n$$

이 경우는 비교적 쉽게 닫힌 꼴의 해를 구했지만, 항상 그런 건 아니다. ■

6.3 차분 방정식의 고전적 해법

■ 예제 C6-3 : *차분 방정식의 동차해 – 토끼 인구 증가 문제*

토끼 1쌍이 매달 새끼 1쌍을 낳고 생후 1개월이면 임신 가능하다고 한다. 첫 번째 달에 토끼 1쌍이 있을 때 n번째 달의 토끼 쌍수를 구할 수 있는 차분 방정식을 세우고 이의 해를 구하라.

<풀이>

n번째 달 1일에서의 토끼 쌍수를 $y[n]$으로 표시하면, 이는 전달에 임신 가능한 토끼 쌍수의 2배에다 전달에 새로 태어난 토끼 쌍수를 더한 것이 된다. $n-1$번째 달 1일에 임신 가능한 토끼 쌍수는 그 전달의 토끼 쌍수와 같으므로 $y[n-2]$가 되고 $n-1$번째 달 1일에 새로 태어난 토끼 쌍수는 그 달의 토끼 쌍수에서 그 전달의 토끼 쌍수를 뺀 것이므로 $y[n-1]-y[n-2]$가 된다. 따라서 $y[n]$은 다음과 같이 된다.

$$y[n]=2y[n-2]+y[n-1]-y[n-2]=y[n-1]+y[n-2] \tag{C6.12}$$

이를 정리하여 다시 쓰면

$$y[n]-y[n-1]-y[n-2]=0$$

위 식의 특성 방정식은 $Q(\gamma)=\gamma^2-\gamma-1=0$이고, 특성근은 $\gamma=(1\pm\sqrt{5})/2$ 가 된다. 따라서 해는 다음과 같이 구해진다.

$$y[n]=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

이 문제의 경우 초기 조건은 $y[0]=0$, $y[1]=1$이므로 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} y[0]=c_1+c_2=0 \\ y[1]=c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases}$$

이를 풀면

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

따라서 이 문제의 해는 다음과 같이 된다.

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

이 결과를 이용하든지 식 (C6.12)를 이용하든지 $y[n]$의 처음의 몇 개 값을 계산해 보면,

$$y[1]=1,\ y[2]=1,\ y[3]=2,\ y[4]=3,\ y[5]=5,\ y[6]=8,\ \cdots$$

이는 여러분들이 잘 알고 있는 유명한 피보나치[Fibonacci] 수열로서, 어떤 순간의 값은 식 (C6.12)와 같이 직전의 2개 값의 합으로 구해진다. ■

■ **예제 C6-4 : *동차해와 과도 응답 - 물탱크의 수위 데이터 필터링***

물탱크의 수위를 매 10분마다 측정하여 1[cm] 단위로 LCD창에 표시하는 시스템이 있다. 측정된 수위 정보는 LCD창에 표시되기 전에 물의 출렁임 등 원하지 않는 측정 잡음을 줄이기 위해 다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 디지털 필터에 의해 필터링 과정을 거치게 된다고 한다.

$$y[n]-0.5y[n-1]=0.5x[n] \tag{C6.13}$$

물이 공급되기 직전의 수위가 4[cm]이고, 물이 공급되면 10분에 1[cm]씩 수위가 높아진다고 할 때, LCD 창에 표시되는 수위는 어떻게 되는지 구하라.

<풀이>

식 (C6.13)의 특성 방정식은 $\gamma-0.5=0$이므로 특성근은 $\gamma=0.5$가 되고, 동차해는 다음과 같다.

$$y_h[n]=c(0.5)^n$$

문제의 조건에서 수위의 측정값, 즉 디지털 필터의 입력은 $x[n]=4+n$으로 쓸 수 있으므로, 특이해를 $y_p[n]=c_1n+c_0$라 두고 이를 차분 방정식에 대입하면

$$(c_1n+c_0)-0.5(c_1(n-1)+c_0)=0.5(n+4)$$

이를 정리하여 양변을 비교하면 $c_1=1,\ c_0=3$이 되므로 특이해는 다음과 같다.

$$y_p[n]=n+3$$

따라서 디지털 필터의 출력은 다음과 같이 되고

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c(0.5)^n+n+3$$

차분 방정식에 $n=0$로 두어 얻어진 초기 조건 $y[0]=2$를 위의 식에 대입하면 $c=-1$을 얻게 된다. 그러므로 디지털 필터의 출력, 즉 LCD창에 표시되는 수위는 다음과 같게 된다.

$$y[n]=-(0.5)^n+n+3$$

[그림 C6-3]에 디지털 필터의 동차해와 특이해, 그리고 전체 출력을 보였다. 그림에서 시간이 지남에 따라 동차해 성분은 점점 줄어들어 사라지는 것을 볼 수 있다. 이것은 이 디지털 필터의 동차해 성분이 과도 응답임을 의미한다.

만일 물을 공급하기 시작하는 순간의 물탱크 수위에 따라 디지털 필터의 출력에는 동차해 성분이 포함되지 않을 수도 있다고 한다면, 다시 말해 과도현상이 전혀 발생하지 않는 매우 특이한 경우의 초기 수위를 한번 구해보자.

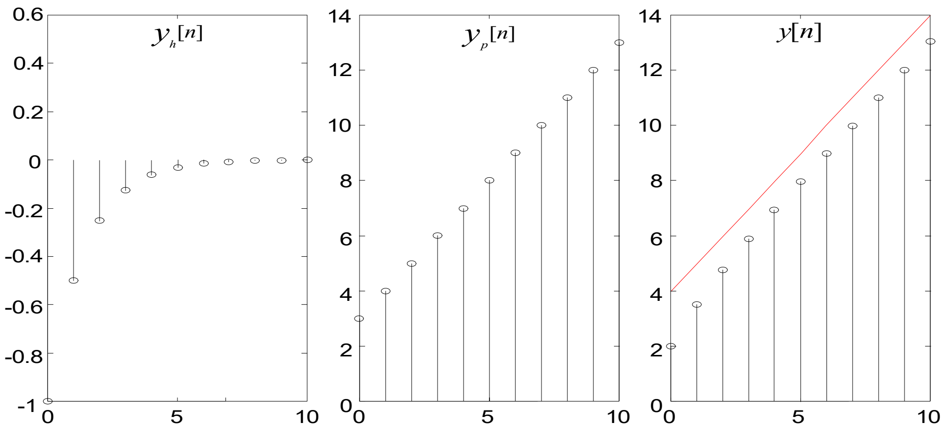
물을 공급하기 시작한 순간의 수위를 모르므로 측정 수위를 $x[n]=n+c$라 두자. 디지털 필터의 출력은 특이해 성분만 가지므로 $y[n]=y_p[n]=an+b$이 되는데, 이 출력과 차분 방정식에 $x[n]$을 대입해 얻은 결과가 같아야 하므로 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$n=0\ :\ y[0]=0.5y[-1]+0.5x[0]=0.5c=b$$

$$n=1\ :\ y[1]=0.5y[0]+0.5x[1]=0.75c+0.5=a+b$$

$$n=2\ :\ y[2]=0.5y[1]+0.5x[2]=0.875c+1.25=2a+b$$

이를 a, b, c에 대해 풀면 $a=1,\ b=1,\ c=2$이므로 $x[n]=n+2,\ y[n]=n+1$이 된다. 다시 말해 물을 공급하기 시작할 때 물탱크의 수위가 2[cm]이면 디지털 필터의 출력에는 동차해 성분이 포함되지 않아 과도현상 없이 바로 항상 측정값에서 1[cm]가 낮은 수위가 LCD창에 표시된다. ■



[그림 C6-3] [예제 C6-4]의 디지털 필터의 출력