

연속 시스템의 시간 영역 해석

책의 ‘1절 연속 시스템의 미분 방정식 표현’에 대해서는 직접형(표준형) 구현도와 관련하여 쌍대 개념에 대한 보완 설명을 추가하였다.

책의 ‘2절 미분 방정식의 고전적 해법’과 관련해서는 미분 방정식의 일반해의 이론적 근거를 설명하고 동차해와 특이해에 대해 보충 설명을 제시하였다. 또한 초기조건의 중요성과 역할에 대해 자세히 다루고 경계조건 정합 방법을 소개하였다. 그리고 초기조건과 시스템 선형성의 관계 및 초기 휴지 조건에 대한 설명을 추가하였다.

책의 ‘3절 시스템 모드와 시스템의 특성’과 관련해서는 시스템 모드와 점근적 안정도의 관련성 및 시스템 모드와 공진의 관계에 대해 보충 설명을 제시하였다.

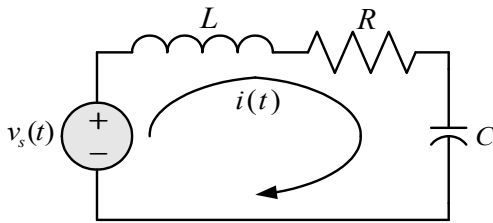
5.1 연속 시스템의 미분 방정식 표현

5.1.1 연속 LTI 시스템의 미분 방정식 표현

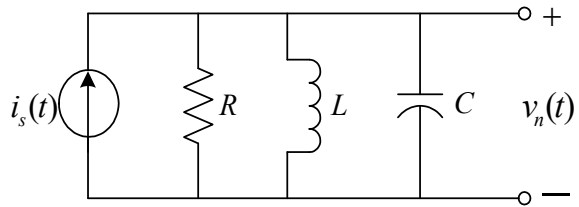
뉴턴의 운동 방정식 등 다양한 물리적 법칙을 통해 이미 친숙한 미분 방정식은 광범위한 영역에서 시스템을 표현하는 모델로서 중요한 역할을 담당한다. 운동 역학, 열 역학, 유체 역학, 전자기학을 비롯한 대부분의 공학, 자연과학 분야에서 해결해야 할 문제에 대한 수학적 모형이 기본적으로 미분 방정식으로 표현되는 것을 볼 수 있다.

5.1.2 연속 시스템의 표준형(직접형) 구현도

연속 시스템의 제1 직접형 구현도와 제2 직접형 구현도는 서로 전치 관계로서 수학적으로는 쌍대관계임을 설명하였다. 쌍대 관계에 대해 전기회로를 예로 살펴보기로 하자.



[그림 C5-1] RLC 직렬 회로



[그림 C5-2] RLC 병렬 회로

RLC 직렬회로와 RLC 병렬회로의 회로 방정식은 각각 키르히호프의 전압 법칙(KVL)과 키르히호프의 전류 법칙(KCL)을 적용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v_s(t) \quad (C5.1)$$

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{1}{R} v(t) + \frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt} = i_s(t) \quad (C5.2)$$

식 (C5.1)과 식 (C5.2)는 구조가 같다. 따라서 식 (C5.1)에 다음과 같이 식 (C5.2)의 맞서는 것으로 대체하면 여전히 등식이 성립하게 되는데, 이를 쌍대 관계라고 한다. 즉 [그림 C5-1]의 RLC 직렬회로와 [그림 C5-2]의 RLC 병렬회로는 서로 쌍대이다.

$$\begin{aligned} v_s(t) &\Leftrightarrow i_s(t) \\ i(t) &\Leftrightarrow v_n(t) \\ \frac{1}{R} &\Leftrightarrow R \\ L &\Leftrightarrow C \\ C &\Leftrightarrow L \end{aligned} \quad (C5.3)$$

5.2 미분 방정식의 고전적 해법

5.2.1 고전적 해법의 기초 개념 및 풀이 과정

미분 방정식의 해

실제로 미분방정식의 일반해가 동차해와 특이해의 합이 되는지를 간단히 살펴보고 넘어가자. 논의의 편의를 위해 (책)식 (5.1)의 미분 방정식을 다시 쓰면

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (\text{책})(5.1)$$

동차해는 정의에 의해 아래의 식 (C5.4)를 만족하며,

$$\frac{d^n y_h(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_h(t)}{dt} + a_0 y_h(t) = 0 \quad (\text{C5.4})$$

특이해는 당연히 식 (C5.5)를 만족한다.

$$\frac{d^n y_p(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_p(t)}{dt} + a_0 y_p(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 x(t) \quad (\text{C5.5})$$

식 (C5.4)와 식 (C5.5)의 양변을 각각 더하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^n [y_h(t) + y_p(t)]}{dt^n} + \dots + a_0 [y_h(t) + y_p(t)] = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 x(t) \quad (\text{C5.6})$$

따라서 $y_h(t) + y_p(t)$ 는 분명히 (책)식 (5.1)의 미분 방정식을 만족하므로 이 미분 방정식의 해이다. 즉

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (\text{책})(5.7)$$

동차해 구하기

동차해는 동차 미분 방정식 $A(D)y(t) = 0$ 의 해이다. 동차해를 구하는 방법을 찾기 위해 일반화 경우에 앞서 가장 간단한 1차 시스템의 경우를 고려해 보자.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a_0 y(t) \quad (\text{C5.7})$$

식 (C5.7)은 해의 도함수가 해 자신과 같은 형태의 함수임을 말해준다. 따라서 직관적으로

해가 지수함수 형태일 것이라고 예상할 수 있다. 즉 $y_h(t) = ce^{\lambda t}$ 라 두고 식 (C5.7)에 대입하여 정리하면 다음의 관계를 얻는다.

$$(\lambda + a_0)ce^{\lambda t} = 0 \quad (C5.8)$$

일반적으로 $e^{\lambda t} \neq 0$ 이므로 $\lambda + a_0 = 0$ 을 만족한다. 그러므로 $\lambda = -a_0$ 이 되고, 식 (C5.7)의 해는 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = ce^{-a_0 t} \quad (C5.9)$$

여기서 c 는 임의의 상수로서 식 (C5.7)은 무수히 많은 해를 가질 수 있으므로, 유일한 해를 얻으려면 부가적인 제한이 필요한데 보통 초기조건의 형태로 주어지게 된다.

이상의 논의를 보다 일반적인 경우로 확대하면 (책)식 (5.10)과 (책)식 (5.11)의 결과를 얻게 된다.

특성근이 중근인 경우의 동차해

특성근이 중근이 되면, (책)식 (5.11)에서 중근에 해당하는 항의 계수를 결정할 수 없으므로 해의 형태가 달라지지 않으면 안 된다. 간단한 예로 2중근의 경우를 생각해 보자.

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y(t) = (D - \lambda_1)^2 y(t) = 0 \quad (C5.10)$$

(책)식 (5.11)을 이용하여 동차해를 구하게 되면, 시스템 모드가 $e^{\lambda_1 t}$ 하나이므로 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t} = ce^{\lambda_1 t} \quad (C5.11)$$

이때 만약 초기조건이 $y(0^-) = 1$, $\dot{y}(0^-) = 1$ 로 주어졌다고 하면

$$\begin{cases} c = 1 \\ \lambda_1 c = 1 \end{cases} \quad (C5.12)$$

임의의 값을 갖는 λ_1 에 대해 식 (C5.12)를 만족하는 c 는 존재하지 않는다. 따라서 올바른 동차해를 구하기 위해 다른 대안을 찾아야 하는데, 우선 동차해를 다음과 같이 가정하자.

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \quad (C5.13)$$

$y_h(t) = c_2 t e^{\lambda_1 t}$ 를 식 (C5.10)에 대입하면

$$\begin{aligned} & (c_2\lambda_1^2 te^{\lambda_1 t} + 2c_2\lambda_1 e^{\lambda_1 t}) + a_1(c_2\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t}) + a_2 c_2 te^{\lambda_1 t} \\ &= (\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2)c_2 te^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a_1)c_2 e^{\lambda_1 t} = 0 \end{aligned} \quad (C5.14)$$

이로부터 다음의 관계를 얻는다.

$$\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 = 0 \quad (C5.15)$$

$$2\lambda_1 + a_1 = 0 \quad (C5.16)$$

식 (C5.15)는 식 (C5.10)의 특성 방정식이고 식 (C5.16)은 이의 1차 미분식이다. 이는 식 (C5.10)의 특성 방정식의 근 λ_1 이 중근, 즉 특성 방정식뿐만 아니라 이의 1차 미분식도 만족한다는 사실에 정확히 부합되는 결과이다. 따라서 $y_h(t) = c_2 te^{\lambda_1 t}$ 는 앞에서 가정한 것처럼 식 (C5.10)의 해가 맞다.

또한 초기조건 $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$ 을 식 (C5.13)과 이의 미분식에 대입하면

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \lambda_1 c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad (C5.17)$$

가 되어, 식 (C5.12)의 경우와 달리 유일한 계수 c_1, c_2 를 찾을 수 있다.

이상의 논의 과정에서 보았듯이 특성근 λ_1 이 중근인 경우에는 2개의 시스템 모드가 $e^{\lambda_1 t}$ 와 $te^{\lambda_1 t}$ 임을 유의해야 한다. 지금까지의 결과를 일반화하면, 다중 특성근에 대한 동차해가 (책) 식 (5.12)와 같이 구해지게 되는 것이다.

특성근이 공액 복소근인 경우의 동차해

■ 예제 C5-1 : 특성근이 공액 복소근인 시스템의 동차해

다음과 같은 미분 방정식으로 표현되는 전기회로가 있다고 하자.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

초기조건이 $y(0^-) = 0, \dot{y}(0^-) = -2$ 로 주어지고, 인가 전압이 없다면 회로 방정식의 우변은 0이 되어 초기조건에 의한 출력만 나타나게 된다. 이 미분 방정식에 대한 특성 방정식은

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

이므로 특성근은 $\lambda = -1 \pm j1$ 이 되어 공액 복소근이 된다. 따라서 동차해와 이의 미분은

$$y_h(t) = c_1 e^{(-1+j1)t} + c_2 e^{(-1-j1)t}$$

$$\dot{y}_h(t) = (-1+j1)c_1 e^{(-1+j1)t} + (-1-j1)c_2 e^{(-1-j1)t}$$

가 되고, 이에 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ j(c_1 - c_2) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = j1 \\ c_2 = -j1 \end{cases}$$

따라서 해는 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = j1 e^{(-1+j1)t} - j1 e^{(-1-j1)t} = 2e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

만약 책의 [Tip & Note]처럼 동차해를 지수 감쇠 정현파 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$y_h(t) = ce^{-t} \cos(t + \theta)$$

$$\dot{y}_h(t) = ce^{-t} \cos(t + \theta) - ce^{-t} \sin(t + \theta)$$

이에 초기조건을 대입하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} c \sin \theta = 2 \\ c \cos \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

따라서 해는 다음과 같이 얻어지며, 앞에서 구한 결과와 일치한다.

$$y_h(t) = 2e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

이 예제의 풀이 과정을 통하여, 특성근이 공액 복소근인 경우 책의 [Tip & Note]처럼 동차해를 지수 감쇠 정현파 형태로 나타내는 것이 계산이 좀 더 간편함을 알 수 있다. ■

특이해 구하기

정현파 전압을 회로의 입력으로 인가하면 과도 상태를 거쳐 정상상태에 도달하여 정현파 출력을 나타냄을 이미 회로 이론에서 배웠을 것이다. 이는 시스템을 표현한 미분 방정식의 동차해 성분은 시간이 지남에 따라 그 값이 0이 되어 다 사라지더라도 외부의 입력에 의해 입력과 같은 형태를 지닌 응답이 발생한다는 사실을 잘 보여주고 있다. 이처럼 외부의 입력에 의한 입력과 같은 형태를 지닌 응답이 바로 특이해로서, 일반적인 해법은 수학적으로 어려우므로 실제로는 책에서 설명한 미정계수법을 주로 이용하게 되는 것이다.

LTI 시스템을 표현하는 미분 방정식은 좌변과 우변 사이에 등식이 성립되어야 하므로, 좌변은 우변에 포함된 함수들 외의 다른 형태의 함수들을 포함할 수 없다. 그런데 미분 방정식의 우변은 입력 및 y 의 도함수들로 구성되어 있으므로 좌변도 이들과 같은 형태의 함수들로 구성되어 있을 것이다. 그리고 좌변은 출력 및 y 의 도함수 항들로 구성되어 있기 때문에 극단적인 경우를 생각하더라도 시스템의 출력이 입력 및 y 의 도함수 항들을 포함하는 것 외엔 등식을 만족시킬 수가 없다. 다시 말해 입력에 대한 응답, 즉 미분 방정식의 특이해는 입력 함수와 y 의 도함수 항들의 선형 결합으로 주어지게 된다.

실제로 우리가 취급하게 되는 대부분의 입력 신호들이 그러하지만, 입력이 서로 독립인 유한개의 도함수를 갖는 경우에는 미정계수법에 의해 특이해를 결정하는 일이 비교적 간단하다. 예를 들어 입력이 e^{at} 또는 t^r 인 형태를 가질 경우가 그러한데, e^{at} 은 아무리 반복 미분하더라도 입력과 같은 꼴의 함수 e^{at} 가 되므로 이것은 단 하나의 독립된 도함수 e^{at} 을 갖는다. 마찬가지로 t^r 을 반복 미분하면 r 개의 독립된 도함수 $t^{r-1}, t^{r-2}, \dots, t, 1$ 을 생성한다. 이러한 신호에 대해서는 미분 방정식의 우변이 유한개의 서로 독립인 항들을 가지므로, 특이해를 이들의 선형 결합으로 표현한 뒤 좌변에 대입하여 정리해서 좌변과 우변의 각 항에 대한 계수를 비교함으로써 특이해의 계수를 결정하여 유일한 특이해를 구하게 된다. 결과적으로 특이해는 시스템 모드를 하나도 포함하지 않고 입력의 형태에 종속적인 함수가 된다.

한 가지 주목할 점은 특이해를 구하는 데 초기조건은 전혀 관여하지 않는다는 사실이다. 누누이 강조하지만 미분 방정식의 특이해는 외부에서 넣어주는 입력에 의한 응답의 일부이며 초기조건에 의한 반응은 포함하지 않는다는 것을 꼭 명심해야 한다.

초기 조건과 완전해

동차해와 특이해를 각각 구하여 미분 방정식의 해를 얻었다더라도 동차해의 계수(적분상수)를 결정해야만 완전해(유일해)가 얻어진다. 잘 알고 있는 바와 같이 미분은 기울기(또는 변화율)를 의미하는데 어떤 함수 $y(t)$ 를 미분한 도함수 $\dot{y}(t)$ 는 유일하게 주어지지만 $\dot{y}(t)$ 의 기울기(또는 변화율)을 갖는 함수는 하나가 아니기 때문에 $\dot{y}(t)$ 로부터 $y(t)$ 로 되돌아오기 위해서는 부가적인 정보가 필요하다. 예를 들어, $y(t)=t+3$ 을 미분하면 $\dot{y}(t)=1$ 이 되는데 기울기가 1인 함수는 $y(t)=t+3$ 외에도 무수히 많음을 여러분들은 잘 알고 있을 것이다. 따라서 이들 중 특정한 하나($y(t)=t+3$)로 확정이 되기 위해서는 정보가 더 필요하며, 통상적으로 이 정보는 우리에게 초기조건(또는 경계조건)으로 주어지는 것이다.

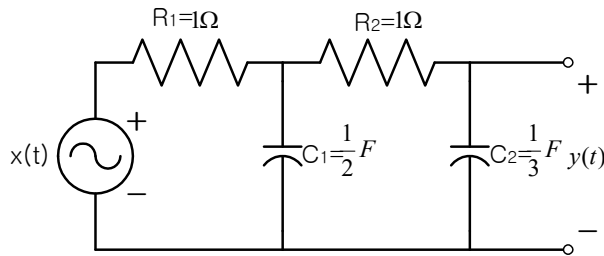
어떤 입력에 대한 LTI 시스템의 반응은 시스템이 달라지지 않는 한 여러 가지가 나올 수가 없지만, 초기조건이 다르면 시스템의 전체적인 출력은 달라질 수 있다. RLC 회로를 예로 들면, 실험할 때마다 커패시터의 초기 충전 전압과 초기 폐로 전류의 값을 달리하여 똑같은 입력 전압을 인가하면 폐로 전류의 값이 달라지는 것을 관찰할 수 있을 것이다. 이것은 100m 달리기에서 같은 사람을 출발선을 0m, 10m, 20m, 30m 선상으로 달리하여 뛰게 하면 달리는 속도는 변함이 없음에도 불구하고 결승점 통과기록이 달라지는 것에 비유할 수 있다. 즉 시스템은 입력에 맞추어 항상 특정한 출력이 나오게 되지만, 시스템의 출력은 또한 초기에 시스템이 어떤 상태에 있었는지에 좌우된다는 것이다.

이제 초기조건을 사용해서 미분 방정식의 유일해를 결정하는 과정에 대해서 알아보자. 먼저 동차해와 특이해의 합으로 미분 방정식의 해를 표현한 다음, n 차 미분 방정식에 대한 초기조건이 $y(t)$, $\dot{y}(t)$, \dots , $y^{(n-1)}(t)$ 의 초깃값으로 주어지므로 이 조건을 이용할 수 있도록 얻어진 미분 방정식의 해의 1차부터 $n-1$ 차 도함수까지 구한다. 미분 방정식의 해와 이의 도함수들에 시간 변수를 초기 시간값으로 하여 주어진 초기조건들을 대입하면 동차해의 계수, 즉 적분상수 c_1, c_2, \dots, c_n 에 대한 n 개의 독립적인 연립방정식을 얻을 수 있다. 이 연립방정식을 풀어 c_1, c_2, \dots, c_n 을 구하여 미분 방정식의 해에 대입하면 미분 방정식의 유일해가 얻어지는 것이다.

5.2.2 연속 LTI 시스템의 미분 방정식 표현

■ 예제 C5-2 : 영상태 응답과 시스템 모드

[그림 C5-3]의 2계 전기회로에 $t=0$ 순간에 정현파 입력 $x(t)=\sin(2t)$ 를 인가할 때 $1/3[F]$ 의 커패시터 양단의 전압 $y(t)$ 는 어떻게 되는지 알아보도록 하자. 단 입력을 인가하기 전에는 커패시터가 충전되어 있지도 않았고 전류도 흐르지 않았다고 한다.



[그림 C5-3] 2계 전기회로

우선 회로 방정식을 세우고 주어진 조건으로부터 초기조건을 구해야 한다. 전원을 포함하지 않는 폐로에 대해 키르히호프의 전압 평형식(KVL)을 세우면

$$v_{C_1}(t) = v_{R_2}(t) + v_{C_2}(t) = R_2 C_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{3} \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

전원으로부터 공급되는 전류 $i_s(t)$ 는 각 커패시터 지로에 흘러 들어가는 전류의 합이 되므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} i_s(t) &= C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} + C_2 \frac{dv_{C_2}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} \right) + \frac{1}{3} \frac{dy(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{6} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5}{6} \frac{dy(t)}{dt} \end{aligned}$$

이제 전원을 포함하는 폐로에 대해 전압 평형식을 세우면

$$x(t) = v_{R_1}(t) + v_{C_1}(t) = \left[\frac{1}{6} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5}{6} \frac{dy(t)}{dt} \right] + \frac{1}{3} \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

이 되고, 이를 정리하면 회로를 나타내는 미분 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6x(t)$$

한편 문제에서 초기 충전 전압과 폐로 전류가 없다고 했으므로 전하보존법칙을 적용하면 다음과 같이 초기조건을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} y(0^+) = y(0^-) = 0 \\ \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = 0 \end{cases}$$

회로 미분 방정식의 특성방정식과 특성근을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 6)(\lambda + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -6$$

따라서 동차해는 다음과 같다.

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t}$$

정현파 입력을 인가했으므로 특이해를 $y_p(t) = a \sin(2t) + b \cos(2t)$ 라고 두어 회로 미분 방정식에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$(2a - 14b) \sin(2t) + (14a + 2b) \cos(2t) = 6 \sin(2t)$$

양변에 대해 계수를 비교하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{cases} 2a - 14b = 6 \\ 14a + 2b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3}{50} \\ b = -\frac{21}{50} \end{cases}$$

따라서 특이해는 $y_p(t) = \frac{3}{50} \sin(2t) - \frac{21}{50} \cos(2t)$ 이 되고 미분 방정식의 해와 그 미분은 다음과 같이 된다.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t} + \frac{3}{50} \sin(2t) - \frac{21}{50} \cos(2t)$$

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 6c_2 e^{-6t} + \frac{6}{50} \cos 2t + \frac{42}{50} \sin 2t$$

위의 두 식에 $t = 0^+$ 로 두고 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} y(0^+) = 0 = c_1 + c_2 - \frac{21}{50} \\ \dot{y}(0^+) = 0 = -c_1 - 6c_2 + \frac{6}{50} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{24}{50} \\ c_2 = -\frac{3}{50} \end{cases}$$

이를 앞에서 구한 미분 방정식의 해에 대입하면 커패시터 C_2 의 양단 전압 $y(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{24}{50} e^{-t} - \frac{3}{50} e^{-6t} + \frac{3}{50} \sin(2t) - \frac{21}{50} \cos(2t) \\ &= \frac{24}{50} e^{-t} - \frac{3}{50} e^{-6t} + \frac{3}{\sqrt{50}} \sin(2t - 81.87^\circ) \end{aligned}$$

이 결과에서 볼 수 있는 것처럼 시스템의 초기 상태가 0이기 때문에 영상태 응답만이 나오고 영입력 응답은 전혀 나타나지 않음에도 불구하고, 시스템 응답에는 시스템 모드 e^{-t} , e^{-6t} 의 항들이 존재한다. 이 항들은 시스템의 내부 축적 에너지에 기인하는 항들이 아니라 바로 외부에서 인가된 입력들이 시스템 고유의 특성에 관련되어 만들어 내는 항들이다. 따라서 이 경우에는 고유 응답과 강제 응답이 모두 영상태 응답의 일부이다. ■

영입력 응답+영상태 응답 형태의 해와 경계조건 정합

영입력 응답과 영상태 응답의 합으로 시스템의 응답을 표현하는 것은 응답의 원인별로 구분한 결과이므로 고유 응답 + 강제 응답 형태로 표현하는 것보다 물리적으로는 더 의미가 있다고 볼 수 있다. 그런데 영입력 응답은 시스템 모드만으로 구성되어 있어서 시스템 동작을 이해하는 데에는 매우 중요하지만, 시스템 활용의 실제적인 측면에서는 영상태 응답이 훨씬 중요하다. 그 이유는 앞의 몇 가지 예에서도 보았겠지만, 안정한 시스템의 영입력 응답은 시간이 지남에 따라 감쇠하여 곧 무시할 수 있기 때문이다. 더욱이 실제의 시스템은 초기조건이 0인 경우가 대부분이므로 이 응답 성분은 0이다. 따라서 시스템의 활용과 관련하여 우선적으로 관심을 가지는 것은 외부 입력에 대한 시스템의 반응, 즉 영상태 응답이다. 또한 시스템은 기본적으로 주어진 입력에 대해 특정한 응답을 나타내도록 설계된다.

그러면 시스템을 표현한 미분 방정식과 관련하여 영상태 응답을 어떻게 구할 것인가? 영입력 응답은 동차해에 $t = 0^-$ 에서의 초기조건을 대입하여 간단히 결정될 수 있지만, 영상태 응답의 경우는 그렇지 못하고 다음의 두 가지 방법을 생각할 수 있다. 첫 번째는 먼저 주어진 미분 방정식에서 임펄스 응답을 구한 뒤 이를 입력과 컨볼루션하는 것이다. 두 번째는 영상태 응답의 정의대로 입력이 인가되기 전의 시스템 상태를 0으로 두고, 즉 $t = 0^-$ 순간의 모든 초기조건을 0으로 두고 미분 방정식을 푸는 것이다. 이 경우 동차해의 계수 결정에는 입력이 인가된 직후인 $t = 0^+$ 순간의 초기조건을 사용해야 하므로 먼저 이를 구하는 과

정을 거쳐야 한다. 두 가지 방법 모두 **경계 조건 정합**(boundary condition matching)이라는 특이 함수와 관련된 까다로운 수학적 과정이 필요하므로 이해하기가 쉽지 않다

미분 방정식으로부터 임펄스 응답을 구하는 방법을 논의하기 전에 임펄스 응답의 정성적 성질을 다시 한번 상기할 필요가 있다. 임펄스 응답은 $t=0^-$ 에서의 모든 초기조건이 0이라고 가정한 후 $t=0$ 에서 임펄스를 인가하였을 때의 시스템 응답이다. $t=0^+$ 순간에는 임펄스 입력은 사라져 버려 더 이상 시스템에 입력이 들어오지 않으나, 입력 임펄스에 의한 에너지로 인해 0이 아닌 초기조건이 순간적으로 발생하게 되고, 시스템은 외부에서 인가되는 입력이 더 이상 없음에도 불구하고 새로이 만들어진 초기조건에 의해서 여전히 응답을 발생시킬 것이다. 이에 근거하여 우리는 미분 방정식으로부터 임펄스 응답을 구할 수 있다.

LTI 시스템이 다음과 같은 n 차 미분 방정식으로 표현된다고 하자.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + b_0 x(t) \quad (C5.18a)$$

$$A(D)y(t) = B(D)x(t) \quad (C5.18b)$$

바로 앞에서 설명한 임펄스 응답의 정성적 성질에 의하면, 임펄스 응답 $h(t)$ 는 $t=0^+$ 에서 다음을 만족시키게 된다.

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 h(t) = 0, \quad t \geq 0^+ \quad (C5.19)$$

식 (C5.19)는 동차 미분 방정식으로서 해는 시스템 모드만으로 이루어진 동차해가 된다.

$$h(t) = \sum \text{시스템 모드} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0^+ \quad (C5.20)$$

그러면 $t=0$ 에서는 어떻게 될까? $t=0$ 에서는 임펄스 입력이 존재하기 때문에 식 (C5.18)의 우변이 0이 아니다. 따라서 임펄스 응답은 다음을 만족하게 된다.

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n} + \dots + a_0 h(t) = b_n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} + \dots + b_0 \delta(t), \quad t = 0 \quad (C5.21)$$

특이해의 구득 과정에서와 마찬가지로 식 (C5.21)의 양변에 대한 계수 비교를 통하여 다음과 같이 $t=0$ 순간의 $h(t)$ 를 구할 수 있다.

$$h(t) = b_n \delta(t), \quad t = 0 \quad (C5.22)$$

따라서 식 (C5.20)과 식 (C5.22)로부터 시스템의 임펄스 응답은 다음과 같이 된다.

$$h(t) = b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (C5.23)$$

임펄스 응답을 완전히 결정하기 위해서는 식 (C5.23)에서 시스템 모드 항들의 계수 값을 찾아내야만 한다. 이는 경계조건 정합을 이용하여 $t = 0^+$ 에서의 초기조건을 구함으로써 풀 수 있다. 경계조건 정합은 $t = 0$ 에서의 미분 방정식 양변의 특이 함수(singularity function)에 대한 계수 정합을 이용하여 $t = 0^-$ 순간에서 $t = 0^+$ 순간으로 옮겨올 때의 변수의 불연속 정도를 찾아냄으로써 초기조건을 구하는 과정이다.

수학적 접근에 의한 임펄스 응답에 대한 일반화된 구득식은 다음과 같은데, 이에 대한 상세한 내용은 생략하기로 한다.

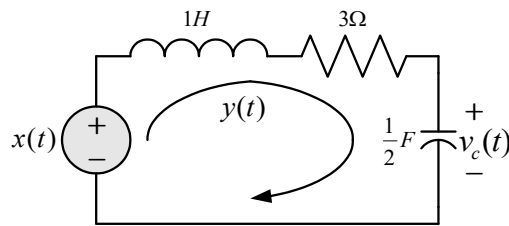
$$h(t) = b_n \delta(t) + [B(D)y_s(t)]u(t) \quad (C5.24)$$

여기서 $y_s(t)$ 는 $y^{(n-1)}(0^-) = 1$, $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \dots = y^{(n-2)}(0^-) = 0$ 의 초기조건 아래서 구한 시스템의 영입력 응답이다.

10장에서 배울 라플라스 변환을 이용하면 영입력 응답+영상태 응답의 형태로 간편하게 시스템 응답을 구할 수 있다. 물론 고유 응답+강제 응답 형태로도 쉽게 해를 구할 수 있으므로, 상수 계수 상미분 방정식의 풀이에는 라플라스 변환을 이용하는 것이 일반적이다.

■ 예제 C5-3 : RLC 회로의 임펄스 응답 - 경계조건 정합

(책)[그림 4-1]의 RLC 직렬회로의 임펄스 응답을 구해보자.



(책)[그림 4-1] RLC 직렬회로

키르히호프의 전압 평형식(KVL)을 세워 정리하면 회로방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (C5.25)$$

임펄스를 입력으로 인가할 경우($x(t) = \delta(t)$) 위의 식은 다음을 만족한다.

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 3 \frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (C5.26)$$

식 (C4.28)의 우변은 좌변보다 차수가 낮으므로($b_2 = 0$), $h(t)$ 에 임펄스 함수는 포함되지 않는다. 따라서 임펄스 응답은 식 (C5.23)으로부터 다음과 같이 될 것이다.

$$h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad (\text{C5.27})$$

인과 시스템의 임펄스 응답은 $t < 0$ 에서 그 값이 0이므로 $h(0^-) = \dot{h}(0^-) = 0$ 이다. 그런데 c_1, c_2 를 구하려면 $h(0^+), \dot{h}(0^+)$ 의 값이 필요하므로 경계조건 정합으로 이를 구해야 한다. 경계조건 정합에서는 특정 시간 순간의 불연속성을 찾아내는 것이 목적이므로 특이 함수에만 주목하여 계수 비교를 하게 된다. 식 (C5.26)에서 보면 $t = 0$ 에서 우변에 $\delta(t)$ 의 미분항이 포함되어 있으므로 좌변의 최고차항에 $\delta(t)$ 의 미분항이 포함되어야만 한다. 즉

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = \alpha \frac{d\delta(t)}{dt} + \beta \delta(t) + \gamma u(t), \quad t = 0 \quad (\text{C5.28})$$

식 (C5.28)에서 $u(t)$ 는 $t = 0$ 에서 불연속이 존재함을 의미한다. 식 (C5.28)으로부터 미분의 환원을 통하여 다음의 관계들을 얻는다.

$$\dot{h}(t) = \alpha \delta(t) + \beta u(t), \quad t = 0 \quad (\text{C5.29})$$

$$h(t) = \alpha u(t), \quad t = 0 \quad (\text{C5.30})$$

식 (C5.28), (C5.29), (C5.30)을 식 (C5.26)에 대입하여 정리하면 다음과 같고,

$$\alpha \frac{d\delta(t)}{dt} + (3\alpha + \beta)\delta(t) + (2\alpha + 3\beta + \gamma)u(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

위 식의 양변의 계수 비교를 통하여 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

따라서 $t = 0$ 에서 식 (C5.30)으로부터 $h(t)$ 는 1만큼의 불연속을 가짐을, 식 (C5.29)로부터는 $\dot{h}(t)$ 가 -3만큼의 불연속을 가짐을 알 수 있다. 즉

$$\begin{cases} h(0^+) - h(0^-) = 1 \\ \dot{h}(0^+) - \dot{h}(0^-) = -3 \end{cases}$$

위 식에 $t = 0^-$ 에서의 초기조건 값을 대입하여 풀면 $t = 0^+$ 에서의 초기조건 $h(0^+) = 1, \dot{h}(0^+) = -3$ 을 얻게 된다. 한편 식 (C5.27)의 $h(t)$ 의 미분은 아래와 같으므로

$$\dot{h}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

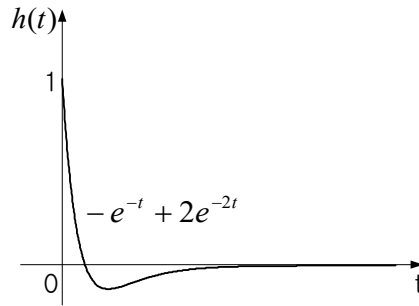
위 식과 식 (C5.27)에 $t=0^+$ 로 두고 조금 전에 구한 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} h(0^+) = c_1 + c_2 = 1 \\ \dot{h}(0^+) = -c_1 - 2c_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

따라서 주어진 전기회로의 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

[그림 C5-4]에 이 임펄스 응답의 파형을 보였다. ■



[그림 C5-4] 회로의 임펄스 응답

■ 예제 C5-4 : RLC 회로의 영상태 응답 - 경계조건 정합

(책)[예제 5-6], [예제 5-10]과 관련하여 영상태 응답을 경계조건 정합을 이용하여 구해보자.

입력이 $x(t) = 10e^{-3t}$ 이므로 $x(0^-) = 0$ 이고 $x(0^+) = 10$ 이 된다. 따라서 $t=0$ 에서 $x(t)$ 에 10만큼의 불연속성이 존재한다. [예제 C5-3]의 풀이 과정에서 살펴보았던 경계조건 정합의 논리에 따르면 $x(t)$ 에 1의 불연속성이 존재하면 $\dot{x}(t)$ 에 $\delta(t)$ 가 한 개 포함된다. 따라서 이 경우 $\dot{x}(t)$ 에 $10\delta(t)$ 가 포함된다. 따라서 식 (C5.25)의 미분 방정식의 우변에 특이 함수 $10\delta(t)$ 가 존재하므로 좌변도 같은 양의 특이 함수를 가져야 하는데, 도함수간의 관계에 의해 좌변의 최고차항인 $\ddot{y}(t)$ 에 $10\delta(t)$ 가 포함되어야 한다. 이것은 $t=0$ 에서 $\dot{y}(t)$ 에 10만큼의 불연속이 존재함을 뜻한다. 그런데 $\dot{y}(t)$ 에는 $\delta(t)$ 나 이의 도함수들이 포함되지 않으므로 $y(t)$ 는 $t=0$ 에서 불연속을 가지지 않는다. 이상의 결과를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} y(0^+) - y(0^-) = 0 \\ \dot{y}(0^+) - \dot{y}(0^-) = 10 \end{cases}$$

영상태 응답은 초기조건이 0일 경우의 응답이므로 $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$ 을 위 식에 대입하여

풀면 $y(0^+) = 0$, $\dot{y}(0^+) = 10$ 을 얻는다.

이후의 풀이 과정은 방금 구해진 초기조건에 대해 미분 방정식 식 (C5.25)를 푸는 고전적 과정을 그대로 진행하면 된다. (책)[예제 5-6]에서 구한 특이해와 동차해를 이용하면 영상태 응답과 그 미분은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y_i(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - 15e^{-3t} \\ \dot{y}_i(t) &= -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} + 45e^{-3t} \end{aligned}$$

위의 두 식에 앞에서 경계조건 정합을 통해 구한 초기조건을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 15 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 45 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -5 \\ c_2 = 20 \end{cases}$$

따라서 영상태 응답은 다음과 같이 된다.

$$y_i(t) = -5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}$$

이 결과는 (책)[예제 5-10]의 결과와 일치한다. ■

시스템의 선형성과 초기조건의 관계 - 초기 휴지 조건

LTI 시스템은 상수 계수 선형 상미분 방정식으로 표현된다. 그렇다면 과연 특정한 상수 계수 선형 상미분 방정식은 어떠한 경우에라도 항상 동일한 선형 시스템을 대표하는 식이 될 수 있을까? 별생각 없이 “그렇다”라고 대답해도 아무런 문제가 없겠는가? 미안하지만 사실은 그렇지 못하다. 이 질문에 대한 해답의 열쇠는 초기조건이 쥐고 있다.

결론부터 말하자면, 초기조건이 0일 경우에는 항상 성립한다. 그러나 초기조건이 0이 아닐 경우에는 시스템 동작 조건의 변화에 맞게 초기조건도 수정되어야만 시스템의 선형성이 보장된다. 이때 선형성 중에서 동차성을 만족시키기 위해서는 입력의 진폭 척도조절만큼 초기조건을 척도조절해야 하고, 가산성을 만족시키기 위해서는 각각의 입력에 대한 초기조건을 더해야만 한다.

■ 예제 C5-5 : 미분 방정식의 선형성과 초기조건

다음과 같은 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템을 생각해 보자.

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t) \quad (\text{C5.31})$$

초기조건이 $y(0^-) = 2$, 입력이 $x(t) = e^{-t}$ 라고 하면, 특성 방정식이 $\lambda + 2 = 0$ 이므로 특성근은 $\lambda = -2$ 가 되고 동차해는 $y_h(t) = ce^{-2t}$ 가 된다. 따라서 영입력 응답은 $y_s(t) = ce^{-2t}$ 에 초

기조건을 대입하면 $c=2$ 가 되므로 $y_s(t)=2e^{-2t}$ 가 된다.

영상태 응답을 구하기 전에 먼저 임펄스 응답을 구해야 한다. 식 (C5.31)에서 입력을 $x(t)=\delta(t)$ 라 두면 임펄스 응답을 얻을 수 있는데, $t>0$ 에서 동차 미분 방정식이 되므로 $h(t)=ce^{-2t}$, $t>0$ 가 되고, 계수 결정을 위해 경계조건 정합으로 $h(0^+)$ 를 찾아야 한다. $t=0$ 에서 식 (C5.31)의 우변이 $\delta(t)$ 가 되므로 좌변도 반드시 $\delta(t)$ 를 포함해야 한다. 따라서 $\dot{h}(t)$ 에 $\delta(t)$ 가 포함된다. 이로부터 $h(t)$ 에 1만큼 불연속이 존재하므로 $h(0^+)-h(0^-)=1$, 즉 $h(0^+)=1$ 이다. 이것을 $h(t)=ce^{-2t}$ 에 대입하여 정리하면 $c=1$ 을 얻는다. 즉 임펄스 응답은 $h(t)=e^{-2t}$ 이 된다.

따라서 입력 $x(t)=e^{-t}$ 에 대한 영상태 응답은 다음과 같고

$$y_i(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = e^{-2t} e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-t} - e^{-2t} \quad (\text{C5.32})$$

전체 시스템 응답은 다음으로 주어진다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = [2e^{-2t}] + [e^{-t} - e^{-2t}] = e^{-2t} + e^{-t} \quad (\text{C5.33})$$

만약 시스템의 동작 환경이 바뀌어 입력 $x(t)=5e^{-t}$ 가 인가된다고 하자. 초기조건은 여전히 $y(0^-)=2$ 일 때 시스템 응답을 구해보면, $x(t)=5e^{-t}$ 에 대한 영상태 응답은 다음과 같이 되므로

$$y_i(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 5e^{-\tau} d\tau = 5[e^{-t} - e^{-2t}] \quad (\text{C5.34})$$

전체 시스템 응답은 다음으로 주어진다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = [2e^{-2t}] + 5[e^{-t} - e^{-2t}] = -3e^{-2t} + 5e^{-t} \quad (\text{C5.35})$$

이 결과에서 볼 수 있듯이 식 (C5.35)의 시스템 응답은 식 (C5.33)의 시스템 응답의 5배와 같지 않으므로 선형성 중의 동차성을 만족하지 않는다. 왜 이런 결과가 나온 걸까? 식 (C5.34)와 식 (C5.32)에서 볼 수 있듯이 입력이 5배 커짐에 따라 영상태 응답은 5배 커져서 동차성을 만족시키지만, 식 (C5.33)과 식 (C5.35)에서 보면 영입력 응답이 변하지 않아 전체적으로 동차성을 충족시키지 못함을 알 수 있다. 따라서 동차성을 만족시키기 위해서는 영입력 응답도 같은 정도로 변하게 해야 하는데, 이것은 초기조건을 그만큼 변화시키면 가능하다는 것을 잘 알 것이다.

그러므로 초기조건을 바꾸어 $y(0^-)=10$ 을 $y_s(t)=ce^{-2t}$ 에 대입하면 $c=10$ 이 얻어진다. 따

라서 영입력 응답은 $y_s(t) = 10e^{-2t}$ 이 되어 정확히 $y(0) = 2$ 일 때의 영입력 응답의 5배가 되므로 시스템의 전체 응답은 다음과 같이 동차성을 만족시키게 된다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = 5[2e^{-2t}] + 5[e^{-t} - e^{-2t}] = 5[e^{-2t} + e^{-t}] \quad (\text{C5.36})$$

이번엔 가산성의 경우에 대해 살펴보자. 만일 초기조건이 $y(0^-) = 1$ 인 경우에 입력 $x(t) = \sin(t)$ 를 인가하였다고 하자. 이때 영입력 응답은 $y_s(t) = e^{-2t}$ 가 되고 영상태 응답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin(\tau) d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \sin(\tau) d\tau \\ &= e^{-2t} \left((2e^{2\tau} \sin(\tau) - e^{2\tau} \cos(\tau)) \Big|_0^t - \int_0^t 4e^{2\tau} \sin(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

위 식에서 부분 적분에 의한 \sin 항 적분의 값은 다음과 같이 되므로

$$\int_0^t e^{2\tau} \sin(\tau) d\tau = \frac{1}{5} (2e^{2\tau} \sin(\tau) - e^{2\tau} \cos(\tau)) \Big|_0^t = \frac{1}{5} (2e^{2t} \sin(t) - e^{2t} \cos(t) + 1)$$

영상태 응답은

$$y_i(t) = \frac{1}{5} (2\sin(t) - \cos(t) + e^{-2t}) \quad (\text{C5.37})$$

로 주어지고, 시스템의 전체 응답은 다음과 같다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = e^{-2t} + \frac{1}{5} (2\sin(t) - \cos(t) + e^{-2t}) \quad (\text{C5.38})$$

이제 초기조건은 $y(0^-) = 2$ 로 그대로 둔 채, 입력 $x(t) = e^{-t} + \sin(t)$ 를 인가할 경우의 시스템 응답을 구해 보자. 초기조건과 시스템 방정식이 바뀌지 않았으므로 영입력 응답은 그대로이고, 영상태 응답은 다음과 같이 된다.

$$y_i(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (e^{-\tau} + \sin \tau) d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin \tau d\tau$$

위 식의 영상태 응답은 입력 $x(t) = e^{-t}$ 와 $x(t) = \sin(t)$ 에 대한 각각의 영상태 응답의 합이므로 다음과 같이 된다.

$$y_i(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] + \left[\frac{1}{5} (2\sin t - \cos t + e^{-2t}) \right] \quad (\text{C5.39})$$

따라서 전체 시스템 응답은 다음과 같다.

$$y(t) = y_s(t) + y_i(t) = 2e^{-2t} + [e^{-t} - e^{-2t}] + \left[\frac{1}{5}(2\sin t - \cos t + e^{-2t})\right] \quad (\text{C5.40})$$

식 (C5.40)은 식 (C5.33)과 식 (C5.38)을 더한 값과 일치하지 않는다. 다시 말해 가산성을 만족하지 않는다. 식 (C5.39)에서 볼 수 있듯이, 영상태 응답 성분은 동차성의 경우와 마찬가지로 가산성을 만족하고 있으나, 식 (C5.40)에서 알 수 있는 것처럼 영입력 응답 성분이 두 번째 입력에 대한 출력 계산시의 초기조건 $y(0^-) = 1$ 에 대응되는 값만큼 부족한 까닭에 전체적으로 가산성이 만족하지 못함을 알 수 있다. 따라서 이를 해결하기 위해서는 각각의 입력의 경우에 대한 초기조건을 더해서 영입력 응답을 구하면 될 것이다. 이에 따라 초기조건을 $y(0^-) = 3$ 으로 하여 영입력 응답을 구하면 $y_0(t) = 3e^{-2t}$ 가 되므로 이번에는 전체 응답은 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} y(t) &= 3e^{-2t} + [e^{-t} - e^{-2t}] + \left[\frac{1}{5}(2\sin(t) - \cos(t) + e^{-2t})\right] \\ &= [e^{-t} + e^{-2t}] + [e^{-2t} + \frac{1}{5}(2\sin(t) - \cos(t) + e^{-2t})] \end{aligned} \quad (\text{C5.41})$$

식 (C5.41)은 정확히 $x(t) = e^{-t}$ 와 $x(t) = \sin(t)$ 각각에 대한 응답의 합이므로 가산성이 만족한다.

이상의 결과에서 볼 수 있듯이 동차성은 초기조건을 입력의 변화만큼 척도조절해야, 그리고 가산성은 각 입력의 경우에 대한 초기조건을 더한 값을 사용해야 만족하여, 비로소 동일한 미분 방정식으로 선형성을 훼손하지 않고 동일한 시스템을 나타낼 수 있게 된다. 그리고 이 모든 상황의 배경에는 영입력 응답 성분이 연관되어 있다. ■

위의 예에서 본 것처럼, 초기조건이 0이 아닌 경우에는 영입력 응답 때문에 미분 방정식이 항상 시스템의 선형성을 보장할 수 없게 된다. 뒤집어 얘기하면 초기조건이 0이라면 상수 계수 선형 상미분 방정식은 항상 선형 시스템을 표현하는 수학적 모델이 된다. 이렇게 모든 초기조건이 0인 상태를 **초기 휴지** initially at rest라고 부른다. 이를 수학적으로 표현하면, 시간 $t = t_0$ 이전의 입력이 0일 때, 출력 및 그 도함수들이 $t = t_0^-$ 에서 모두 0이면 그 시스템은 초기 휴지 상태라고 한다. 즉 $x(t) = 0, t < t_0$ 일 때 $y^{(n-1)}(t_0^-) = \dots = y(t_0^-) = 0$ 이면 시스템은 초기 휴지이다.

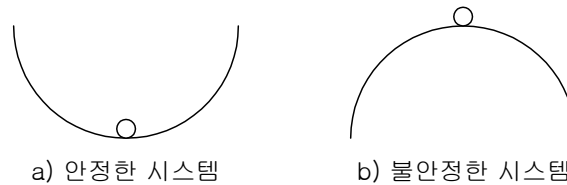
5.3 시스템 모드와 시스템의 특성

5.3.2 시스템 모드와 안정도

시스템 모드와 점근적 안정도

시스템의 안정도에는 BIBO 안정도 외에 널리 쓰이는 개념으로 **점근적 안정도** asymptotic stability 라는 것이 있다. 점근적 안정도는 시스템의 평형 상태와 관련하여 정의된다. 시스템의 평형 상태란 외부에서 시스템을 여기^{exciting}하는 입력이 인가되지 않을 때 시스템이 지속적으로 유지하게 되는 특정한 상태를 말한다. 예를 들어 삼각형의 경우 꼭짓점을 바닥에 대고 거꾸로 세우면 손가락으로 받쳐주지 않는 한 넘어져서 한 번이 바닥에 대이면 더 이상 움직이지 않게 된다. 이 상태가 평형 상태이며 여러분도 알고 있듯이 삼각형의 가장 안정한 자세이다. 이처럼 시간이 지남에 따라 시스템이 특정한 상태에서 평형 상태로 될 때 그 시스템은 점근적 안정이라고 한다.

[그림 C5-5]의 경우를 생각해보자. 그림 (a)는 반구모양의 그릇을 바로 놓은 경우이고, 그림 (b)는 엎어놓은 경우로서 여기에 구슬을 잘 놓아서 움직이지 않고 있다고 하자(즉, 평형 상태에 있다). 이제 구슬을 밀면 어떤 결과가 나오겠는가? 그림 (a)의 경우는 구슬이 움직이다가 결국에는 원래의 자리에 서게 된다. 반면, 그림 (b)의 구슬은 그릇 곡면을 타고 굴러 떨어져버린다. 다시 말해 (a)의 경우는 점근적 안정이다. (b)의 경우는 점근적 불안정이다.



[그림 C5-5] 점근적 안정도의 예

그렇다면 시스템에 특정한 초기조건을 인가하였을 때 시스템이 돌아가게 될 평형 상태는 만약 존재한다면 무엇인가? 입력이 인가되지 않는 경우 시스템의 응답은 영입력 응답뿐이며, 이것은 시스템 모드 항들로 이루어져 있음을 우리는 알고 있다. 그런데 시스템 모드 항들은 지수함수 형태이므로 다음과 같이 특성근의 값에 의해 시간이 지남에 따라 감소하거나 증가하는 두 가지 양상을 보인다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = \begin{cases} 0, & \text{Re}(\lambda_i) < 0 \\ \infty, & \text{Re}(\lambda_i) > 0 \end{cases} \quad (\text{C5.42})$$

둘 중 충분한 시간이 지난 뒤에 값이 변하지 않게 되는 것은 지수적으로 감소하는 경우로서 최종적인 값은 0이 된다. 즉 시스템의 평형 상태는 영상태이다. 따라서 시스템의 점근적 안정도는 $t \rightarrow \infty$ 로 접근함에 따라 시스템이 영상태로 가는 성질을 말하며, 이를 위한 조건은 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ 이어야 한다. 반면에 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ 의 경우는

$t \rightarrow \infty$ 로 접근함에 따라 시스템 응답은 계속 증가하게 되어 불안정해진다.

$Re(\lambda_i) = 0$ 의 경우에는 앞서도 살펴본 것처럼 순허근의 경우로 공액으로 존재하므로 시스템 모드 항을 정리하면 정현 함수가 되어 0으로도 ∞ 로도 접근하지 않고 지속적으로 진동하게 되는, 일종의 안정과 불안정의 경계 상태가 된다. 이를 경우를 임계 안정(marginally stable) 상태에 있다고 한다.

5.3.3 시스템 모드와 공진

책의 설명과 다른 방법으로 LC 회로의 공진 현상을 해석해보자.

책에서처럼 미분 방정식을 직접 풀어서 구할 수도 있지만, 시스템 모드와 임펄스 응답의 관계도 살펴볼 겸 먼저 미분 방정식으로부터 임펄스 응답을 구한 뒤 이를 정현과 입력과 컨벌루션하여 회로 출력을 구하기로 한다.

임펄스는 $t=0$ 순간에만 존재하므로, 입력이 임펄스일 경우 식(C5.42)의 미분 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} h(t) = \frac{1}{L} \frac{d\delta(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{L} \delta(t), & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases} \quad (C5.43)$$

즉 $t>0$ 에서 동차 미분 방정식이 되며, 따라서 임펄스 응답은 시스템 모드로 이루어진 동차해가 된다. $t=0$ 순간의 관계식은 이 동차 미분 방정식을 풀기 위한 초기조건을 구하는데 활용된다. $t=0$ 일 때 우변에 $\dot{\delta}(t)$ 가 있으므로, 등식이 성립하려면 좌변에도 가장 차수가 높은 미분항 $\ddot{h}(t)$ 에 $\dot{\delta}(t)$ 가 포함되어야 한다. 이는 $\dot{h}(t)$ 에 $\delta(t)$ 가 포함되어야 함을 의미하고, 이는 다시 $h(t)$ 에 $u(t)$ 가 포함되어야 함을 의미한다. $u(t)$ 는 $t=0^-$ 와 $t=0^+$ 에서 1만큼 불연속을 가진다. 따라서 $h(0^+) - h(0^-) = 1/L$ 이 되고, 이로부터 $h(0^+) = 1/L$ 을 얻는다. 같은 논리를 $\dot{h}(t)$ 에 적용하면 $\dot{h}(0^+) - \dot{h}(0^-) = 0$ 으로 $\dot{h}(0^+) = 0$ 을 얻게 된다(이러한 과정을 경계조건 정합이라 한다). 얻어진 조건을 (책)식 (5.22)의 동차해와 이를 한번 미분한 식에 대입하여 정리하면

$$\begin{cases} h(0^+) = c_1 + c_2 = \frac{1}{L} \\ \dot{h}(0^+) = j\omega_r c_1 - j\omega_r c_2 = j\omega_r (c_1 - c_2) = 0 \end{cases} \quad (C5.44)$$

와 같고, 이를 풀면 $c_1 = c_2 = 1/2L$ 을 얻는다. 따라서 임펄스 응답은 다음과 같이 된다.

$$y_h(t) = \frac{e^{j\omega_r t} + e^{-j\omega_r t}}{2L} = \frac{1}{L} \cos(\omega_r t) \quad (C5.45)$$

정현파 입력 $2L \sin(\omega_r t) = (\frac{L}{j})(e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t})$ 에 대한 정상상태 응답은 임펄스 응답과의 컨볼루션에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \frac{1}{j2} \int_0^t (e^{j\omega_r(t-\tau)} + e^{-j\omega_r(t-\tau)})(e^{j\omega_r \tau} - e^{-j\omega_r \tau}) d\tau \quad (C5.46) \\ &= \frac{1}{j2} \left((e^{j\omega_r t} - e^{-j\omega_r t})\tau \Big|_0^t - \frac{1}{-j2\omega_r} e^{j\omega_r(t-2\tau)} \Big|_0^t + \frac{1}{j2\omega_r} e^{-j\omega_r(t-2\tau)} \Big|_0^t \right) \\ &= t \sin(\omega_r t) \end{aligned}$$

따라서 시스템 응답은 시간에 따라 선형적으로 증가하여 (책)[그림 5-10(b)]에 보인 것처럼 결국은 ∞ 에 도달한다. 즉 시스템 모드와 같은 형태(같은 주파수)를 갖는 정현파 입력에 대해 공진이 발생한다. 이로부터 LC 회로의 공진 주파수가 특성근에 의해 결정됨을 알 수 있다.