제 13 장

z 변환

책의 '1절 z 변환의 개념과 정의'와 관련하여 z 변환의 수렴 영역에 관한 예제를 보충하였다.

책의 '3절 z 변환의 성질'과 관련하여 몇 가지 성질에 대한 보충 설명과 z 변환의 성질을 이용하는 예제를 제시하였다.

책의 '4절 z 역변환'과 관련하여 역변환 정의식에 대한 설명을 추가하였고, 수렴 영역에 따라 단방향 또는 양방향 신호로 어떻게 z 역변환할 수 있는지를 설명하였으며, 많은 예제를 통해 z 역변환을 충분히 익힐 수 있도록 하였다. 특히 분모에 중근 또는 공액 복소근이 있을 경우의 부분 분수 전개를 간편하게 할 수 있는 팁을 예제로 소개하였다.

책의 '5절 z 변환에 의한 차분 방정식 해석'과 관련하여 출력을 두 가지 성분으로 나누어 구할 수 있는 예제를 추가하여 풀이법을 잘 익힐 수 있도록 하였다.

책의 '6절 전달 함수'와 관련해서는 안정도 및 인과성과 관련된 보충 설명과 예제를 보완하였다.

책의 '7절 전달 함수와 주파수 응답의 관계'와 관련해서는 고유 함수의 관점에서 전달 함수와 주파수 응답을 새롭게 해석하고, 주파수 응답의 극과 영점에 대한 의존성, 극과 영점의 주파수 선택 특성 등에 대해 추가 설명을 제시하였다.

13.1 z 변환의 개념과 정의

13.1.2 z 변환의 수렴 영역

■ 예제 C13-1 : *안정한 신호와 불안정한 신호의 z 변환*

(a) 신호 $x[n]=(0.8)^n u[n]$의 z 변환을 구하라.

(b) $X(z)=\dfrac{1}{z+1.2}$를 z 역변환하여 대응되는 신호를 구하라.

<풀이>

(a) z 변환의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1+0.8z^{-1}+0.8^2z^{-2}+0.8^3z^{-3}+\cdots \\ &= 1+0.8z^{-1}+(0.8z^{-1})^2+(0.8z^{-1})^3+\cdots \\ &= \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{z}{z-0.8} \end{aligned}$$

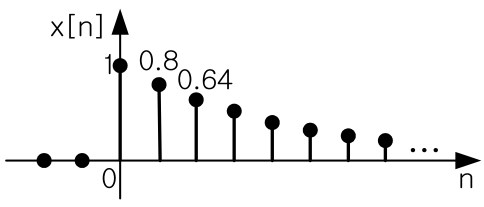
(b) $X(z)$을 z^{-1}의 함수로 나타내어 긴 나눗셈에 의해 $x[n]$을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{z+1.2} = \frac{z^{-1}}{1+1.2z^{-1}} \\ &= z^{-1}\{1+(-1.2z^{-1})+(-1.2z^{-1})^2+(-1.2z^{-1})^3+\cdots\} \\ &= z^{-1}+(-1.2)z^{-2}+(-1.2)^2z^{-3}+(-1.2)^3z^{-4}+\cdots \end{aligned}$$

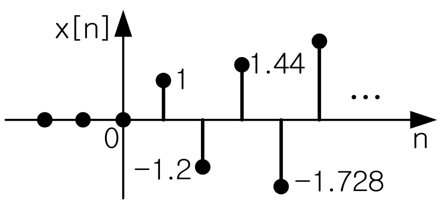
따라서 $x[n]$은 다음과 같이 구해진다.

$$x[0]=0,\ x[1]=1,\ x[2]=-1.2,\ x[3]=1.44,\ x[4]=-1.728,\ \cdots$$

두 신호를 [그림 C13-1]에 나타내었다.



(a) $x[n]=(0.8)^n u[n]$



(b) $X(z)$의 시간 신호

[그림 C13-1] [예제 C13-1]의 신호

그림에서 보듯이 (b)의 신호는 시간이 지남에 따라 발산하는 불안정한 신호이다. 무한 급수의 공비의 크기가 1보다 크게 되면 (b)의 신호처럼 발산하는 불안정한 신호가 된다. ■

■ 예제 C13-2 : *양방향 신호의 z 변환*

다음과 같은 양방향 신호의 z 변환을 구하라.

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = (0.9)^n u[n] + (1.2)^n u[-(n+1)]$$

<풀이>

$x_1[n]$과 $x_2[n]$에 대해 (책)식 (13.10)과 (책)식 (13.11)을 이용하여 각각 z 변환하면 다음과 같다.

$$X_1(z) = \frac{z}{z-0.9} \qquad |z| > 0.9$$

$$X_2(z) = \frac{-z}{z-1.2} \qquad |z| < 1.2$$

$X_1(z)$와 $X_2(z)$ 양쪽 다 수렴하는 공통 영역은 $0.9 < |z| < 1.2$이다. 따라서 $x[n]$의 z 변환은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X(z) = X_1(z) + X_2(z) &= \frac{z}{z-0.9} - \frac{z}{z-1.2} \\ &= \frac{-0.3z}{(z-0.9)(z-1.2)}, \qquad 0.9 < |z| < 1.2 \end{aligned}$$

이 예와 같이 양방향 z 변환은 반드시 수렴 영역을 표시해야 한다. ■

13.3 z 변환의 성질

z 변환의 성질은 시간 이동 성질을 제외하고는 양방향 z 변환과 단방향 z 변환의 차이가 거의 없다.

13.3.1 선형성

(책)식 (13.28)로 주어진 선형성을 나타내는 z 변환쌍의 수렴 영역은 $X(z)$의 수렴 영역 R_X와 $Y(z)$의 수렴 영역 R_Y을 동시에 만족해야 하므로 $R_X \bigcap R_Y$가 된다. 따라서 z 변환쌍을 수렴 영역과 함께 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \Leftrightarrow \alpha X(z) + \beta Y(z), \quad ROC: R_X \bigcap R_Y \tag{C13.1}$$

z 변환의 선형성을 이용하면, 복잡한 신호를 여러 개의 기본 신호로 분해하여 이미 알고 있는 기본 신호의 z 변환의 일차 결합으로 나타냄으로써 복잡한 신호도 손쉽게 z 변환을 할 수 있게 된다. 예를 들어, 2절에서 (책)식 (13.23)처럼 정현파의 z 변환을 구한 것도 선형성을 적용한 결과이다.

13.3.3 시간 반전

시간 반전은 z을 z^{-1}으로 치환하는 동작이므로 수렴 영역은 $x[n]$의 수렴 영역 R_X의 역이 된다. 예를 들어, $x[n]$의 수렴 영역이 $a<|z|<b$이면, $x[-n]$의 수렴 영역은 z을 z^{-1}으로 치환하면 $\frac{1}{b}<|z|<\frac{1}{a}$가 된다.

따라서 z 변환쌍을 수렴 영역과 함께 나타내면 다음과 같이 된다.

$$x[-n] \Leftrightarrow X(z^{-1}), \quad ROC: R_X^{-1} \tag{C13.2}$$

13.3.4 주파수 척도조절(지수 신호 곱)

주파수 척도 변화는 z가 z/z_0로 바뀌었기 때문에 수렴 영역은 $x[n]$의 수렴 영역 R_X의 $|z_0|$배가 된다. 따라서 수렴 영역을 표시한 변환쌍은 다음과 같다.

$$z_0^n x[n] \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC: |z_0| R_X \tag{C13.3}$$

■ 예제 C13-3 : *z 변환의 성질들의 혼합 적용*

다음과 같은 $X(z)$에 대해 z 변환의 성질을 이용하여 $x[n]$을 구하라.

$$X(z) = \log(1 + az^{-1})$$

<풀이>

주파수 미분 성질을 이용하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} = Z\{nx[n]\}$$

그런데 $(-a)^n u[n] \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+az^{-1}}$이므로 위 식의 우변은 선형성과 시간 이동 성질에 의해 $(-a)^n u[n]$을 a배하고 1만큼 시간 지연시킨 것에 대응된다. 즉,

$$\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} = Z\{a(-a)^{n-1}u[n-1]\}$$

따라서 두 식을 비교하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n}u[n-1]$$

■

13.4 z 역변환

단방향 z 변환이나 양방향 z 변환이나 z 역변환의 방법은 동일하다. 다만 z 역변환을 할 때 *양방향 z 변환에서는 주어진 수렴 영역에 맞는 시간 신호로 역변환을 해야 한다*는 점을 주의해야 한다. 그런데 대부분 경우 우리는 인과적인 신호와 시스템을 다루게 되므로, 다시 말해 단방향 z 변환을 주로 사용하게 되므로, 수렴 영역을 별도로 고려하지 않고 역 z 변환하게 되는 것이다.

정의식에 의한 z 역변환

(책)식 (13.6)의 정의식대로 복소 적분에 의한 역변환은 수학적 지식이 없으면 적용을 하기가 어렵고 계산도 복잡해서 학부 수준에서는 거의 사용하지 않는다.

(책)식 (13.6)의 역변환 정의식은 복소 적분 이론을 이용하여 유도된다. $X(z)$에 대해 다음과 같은 적분을 생각하면

$$\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz = \oint_{\Gamma}\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}z^{n-1}dz = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\oint_{\Gamma} z^{n-1-k}dz \tag{C13.4}$$

Cauchy의 복소 적분 정리에 의해 식 (C13.4)의 적분은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{n-1-k}dz = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases} \tag{C13.5}$$

따라서 다음과 같이 z 역변환의 정의식이 얻어진다.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz \tag{C13.6}$$

식 (C13.6)의 복소 적분 계산은 Cauchy의 **유수 정리**residue theorem에 의해 수행된다.

$$x[n] = \sum_{z_i \in D_{\Gamma}} \underset{z=z_i}{Res}\left[X(z)(z-z_i)^{n-1}\right] \tag{C13.7}$$

여기서 유수는 다음과 같이 계산된다.

$$\underset{z=z_i}{Res}[X(z)] = \frac{1}{(N-1)!}\left.\frac{d^{N-1}X(z)(z-z_i)^N}{dz^{N-1}}\right|_{z=z_i}, \quad \forall z_i \in D_{\Gamma} \tag{C13.8}$$

■ 예제 C13-4 : *복소 적분(유수 정리)에 의한 z 역변환*

다음과 같은 $X(z)$을 역변환 정의식을 이용하여 역변환하여 $x[n]$을 구하라.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>a$$

<풀이>
역변환 정의식에 유수 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz \quad = \underset{z=a}{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\right] = \underset{z=a}{Res}\left[\frac{z^{n}}{z-a}\right] \\ &= \frac{z^n}{z-a}(z-a)\Big|_{z=a} = a^n \end{aligned}$$

■

13.4.1 멱급수 전개법에 의한 z 역변환

멱급수 전개법으로 좌편향 신호의 z 역변환을 구할 경우, 분모를 상수항부터 순서대로 나열한 뒤 긴 나눗셈을 수행하면 된다.

■ 예제 C13-5 : *멱급수 전개법에 의한 무한 구간 신호의 z 역변환*
$X(z)$가 다음과 같이 주어질 경우, 멱급수 전개를 이용해 $x[n]$를 구하라.

$$X(z)=\frac{z(4z-1)}{2z^2-2z+1}$$

<풀이>
분자를 분모로 나누면,

$$\begin{array}{r|llll}
 & 2 & +1.5z^{-1} & +0.5z^{-2} & -0.25z^{-3}+\cdots \\
\hline
2z^2-2z+1 & 4z^2-\ z & & & \\
 & 4z^2-4z & +2 & & \\
\cline{2-3}
 & \quad 3z & -2 & & \\
 & \quad 3z & -3 & +1.5z^{-1} & \\
\cline{2-4}
 & & 1 & -1.5z^{-1} & \\
 & & 1 & -1.0z^{-1} & +0.5z^{-2} \\
\cline{3-5}
 & & & -0.5z^{-1} & -0.5z^{-2} \\
 & & & & \vdots
\end{array}$$

그러므로 $X(z)$는 다음의 멱급수 형태로 쓸 수 있다.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=2+1.5z^{-1}+0.5z^{-2}-0.25z^{-3}+\cdots$$

따라서 $x[0]=2$, $x[1]=1.5$, $x[2]=0.5$, $x[3]=-0.25$, $\cdots$와 같이 $x[n]$의 값을 구할 수 있는데, 구해진 수열로부터 $x[n]$의 닫힌 꼴을 유추하기가 쉽지 않다. ■

■ 예제 C13-6 : *수렴 영역에 따른 z 역변환 – 멱급수 전개법*

다음과 같은 $X(z)$에 대해 수렴 영역이 $|z|<0.5$일 때 z 역변환을 구하라.

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$$

<풀이>

수렴 영역이 원의 내부이므로 신호는 좌편향 신호이다. 따라서 전개하려는 멱급수에서 z의 지수가 양이 되어야 한다. 분모를 $0.5-1.5z+z^2$과 같이 상수항부터 순서대로 나열하여 표시한 뒤에 분자를 분모로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\begin{array}{rl}
 & 2z^2+6z^3+14z^4+30z^5+62z^6+\ \cdots \\
\hline
\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z+z^2\ \big) & z^2 \\
 & z^2-\ 3z^3\ +2z^4 \\
\hline
 & \quad 3z^3-2z^4 \\
 & \quad 3z^3-9z^4\ +6z^5 \\
\hline
 & \qquad 7z^4\ -\ 6z^5 \\
 & \qquad 7z^4\ -21z^5+14z^6 \\
\hline
 & \qquad\quad 15z^5-14z^6 \\
 & \qquad\quad 15z^5-45z^6+30z^7 \\
\hline
 & \qquad\qquad 31z^6-30z^7 \\
 & \qquad\qquad\quad \vdots
\end{array}$$

그러므로 $X(z)$는 다음과 같은 멱급수가 된다.

$$X(z)=2z^2+6z^3+14z^4+30z^5+6z^6+\ \cdots$$

따라서 $x[-1]=0$, $x[-2]=2$, $x[-4]=14$, $x[-5]=30$, $\cdots$ 과 같이 시간 신호 $x[n]$의 값을 구할 수 있다. ■

13.4.2 부분분수 전개법에 의한 z 역변환

■ 예제 C13-7 : *부분분수 전개법에 의한 z 역변환*

다음의 $X(z)$에 대해 부분분수 전개법으로 z 역변환하여 $x[n]$을 구하라.

$$X(z)=\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}$$

<풀이>

$X(z)$를 직접 부분분수 전개하면 다음과 같다.

$$X(z)=\frac{8z-19}{(z-2)(z-3)}=\frac{3}{z-2}+\frac{5}{z-3}$$

위 식은 변환쌍표를 이용하여 바로 역변환할 수가 없고, 양변에 z를 곱한 뒤에야 변환쌍표를 이용하여 다음과 같이 역변환할 수 있다.

$$x'[n]=Z^{-1}\{zX(z)\}=3(2)^n+5(3)^n$$

그런데, $zX(z)$는 z 변환의 정의로부터 다음과 같이 주어지는 함수이므로

$$zX(z)=z\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]z+x[1]+x[2]z^{-1}+\cdots+x[n]z^{-n+1}+\cdots$$

$x'[n]$은 $x[n]$을 좌측으로 1만큼 시간 이동시킨 신호가 된다. 따라서 $x[n]$은 $x'[n]$을 1만큼 시간 지연한 신호, 즉 $x[n]=x'[n-1]u[n-1]$이 되므로 다음과 같이 구해진다.

$$x[n]=(3(2)^{n-1}+5(3)^{n-1})u[n-1]$$

이상에서 볼 수 있듯이 $X(z)$를 직접 부분분수로 전개하면 언제나 $u[n-1]$이 곱해진 답이 구해진다. 이런 형태는 어색해 보일 뿐만 아니라 불편하다. 우리는 $u[n-1]$이 곱해진 것 대신 $u[n]$이 곱해진 형태를 선호한다. 앞 절에서 여러 신호의 z 변환을 구해보았지만, $u[n]$이 곱해진 신호들의 z 변환은 모두 분자에 인수 z를 갖는다. 이러한 사실로부터 $X(z)$를 전개한 후에 각 항의 분자가 인수 z를 갖도록 하는, 변형된 부분분수로 전개하여야 함을 알 수 있다. 이것은 $X(z)/z$를 부분분수로 전개한 뒤 양변을 z로 곱함으로써 가능하다.

주어진 문제를 이 방법으로 다시 구해보면, $X(z)/z$의 부분분수 전개는 다음과 같이 된다.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-2}+\frac{K_3}{z-3}$$

(책)식 (13.55)를 이용하여 부분분수 항들의 계수를 결정하면 다음과 같다.

$$K_1=\left.\frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)}z\right|_{z=0}=-\frac{19}{6}$$

$$K_2 = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)}(z-2)\bigg|_{z=2} = \frac{3}{2}$$
$$K_3 = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)}(z-3)\bigg|_{z=3} = \frac{5}{3}$$

그러므로 $X(z)$는 다음과 같이 부분분수로 전개된다.

$$X(z) = -\frac{19}{6} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-2} + \frac{5}{3}\frac{z}{z-3}$$

따라서 z 변환쌍표로부터 다음과 같이 $x[n]$을 구할 수 있다.

$$x[n] = -\frac{19}{6}\delta[n] + \left(\frac{3}{2}(2)^n + \frac{5}{3}(3)^n\right)u[n]$$

이 답이 앞에서 $X(z)$를 직접 부분분수로 전개하여 구한 $x[n]$과 같다는 사실은 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$을 대입하여 $x[n]$의 값을 계산해서 비교하면 금방 알 수 있다.

얻어진 답의 형태도 그렇고, 계산 과정도 그렇고 후자의 경우가 좀 더 편리하다. 그러므로 z 역변환은 언제나 $X(z)$가 아니라 $X(z)/z$를 부분분수로 전개한 후 양변에 z를 곱하여 $X(z)$의 분자에 인수 z를 갖게 만들어 구하게 된다. ■

좌편향 신호에 대해 부분 분수 전개법을 이용하여 z 역변환을 구할 경우는 다음의 z 변환쌍을 적용하면 된다.

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \tag{C13.9}$$

■ **예제 C13-8 : *수렴 영역에 따른 z 역변환 – 부분분수 전개법***

(책)[예제 13-20]의 $X(z)$의 수렴 영역에 따른 z 역변환을 부분분수 전개법으로 구하라.

<풀이>

주어진 $X(z)$에 대한 부분분수 전개는 이미 (책)[예제 13-21]에서 다음과 같이 구한 바 있다.

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

$X(z)$의 수렴 영역은 다음의 세 가지 경우가 가능하므로, 역변환도 이에 맞추어 세 가지 신호 중의 하나가 될 것이다.

① ROC : $|z| > 1$

② ROC : $0.5 < |z| < 1$
③ ROC : $|z| < 0.5$

① ROC : $|z| > 1$
(책)[예제 13-21]에서 이미 구한 것과 같이 인과 신호에 해당하며, $x[n]$은 다음과 같다.

$$x[n] = u[n] - (0.5)^n u[n]$$

② ROC : $0.5 < |z| < 1$
양방향 신호로서 $|z| < 1$과 관련이 있는 $X(z)$의 첫 번째 항은 비인과 신호, $|z| > 0.5$와 관련이 있는 두 번째 항은 인과 신호로 역 변환된다. 따라서

$$x[n] = u[-n-1] - (0.5)^n u[n]$$

③ ROC : $|z| < 0.5$
비인과 신호로서 $x[n]$은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = u[-n-1] - (0.5)^n u[-n-1]$$

이상과 같이 수렴 영역에 따라서 z 역변환의 결과가 완전히 달라지는데, 수렴 영역의 표시 등 특별한 전제가 없는 한 보통 인과 신호를 다루는 단방향 z 변환의 경우로 한정하여 취급하게 되는 것이다. ■

■ 예제 C13-9 : *수렴 영역에 따른 z 역변환 - 부분 분수 전개법*
다음 신호의 수렴 영역이 (a) $|z| > 2$, (b) $|z| < 0.8$, (c) $0.8 < |z| < 2$일 때 z 역변환을 각각 구하라.

$$X(z) = \frac{-z(z+0.4)}{(z-0.8)(z-2)}$$

<풀이>
$X(z)$의 양변을 z로 나누어 부분분수 전개하면 다음과 같다.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-(z+0.4)}{(z-0.8)(z-2)} = \frac{1}{(z-0.8)} - \frac{2}{(z-2)}$$

따라서 $X(z)$는 다음과 같이 된다.

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.8)} - 2\frac{z}{(z-2)}$$

(a) $|z| > 2$

인과 우편향 신호의 경우로 z 역변환한 $x[n]$은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = \left((0.8)^n - 2(2)^n\right)u[n]$$

(b) $|z| < 0.8$
비인과 좌편향 신호의 경우로 z 역변환 결과는 다음과 같다.

$$x[n] = \left(-(0.8)^n + 2(2)^n\right)u[-(n+1)]$$

(c) $0.8 < |z| < 2$
$X(z)$의 첫 번째 항은 우편향 신호, 두 번째 항은 좌편향 신호의 경우로 z 역변환 결과는 다음과 같이 된다.

$$x[n] = (0.8)^n u[n] + 2(2)^n u[-(n+1)]$$

■

■ **예제 C13-10 : *$X(z)$의 분모가 공액 복소근을 갖는 경우의 z 역변환***
다음과 같은 $X(z)$에 대해 부분분수 전개법으로 z 역변환을 구하라.

$$X(z) = \frac{z(4z-1)}{4z^2-2z+1}$$

<풀이>
$X(z)$의 분모의 근이 $p_1,\ p_2 = (1 \pm j\sqrt{3})/4$이므로 $X(z)/z$의 부분분수 전개는

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{4z-1}{4z^2-2z+1} = \frac{K_1}{z-(1+j\sqrt{3})/4} + \frac{K_2}{z-(1-j\sqrt{3})/4}$$

이고, (책)식 (13.55)에 의해 계수 K_1과 K_2를 구하면 다음과 같다.

$$K_1 = \frac{4z-1}{4\left(z-\frac{1+j\sqrt{3}}{4}\right)\left(z-\frac{1-j\sqrt{3}}{4}\right)}\left(z-\frac{1+j\sqrt{3}}{4}\right)\Bigg|_{z=\frac{1+j\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = \frac{4z-1}{4\left(z-\frac{1+j\sqrt{3}}{4}\right)\left(z-\frac{1-j\sqrt{3}}{4}\right)}\left(z-\frac{1-j\sqrt{3}}{4}\right)\Bigg|_{z=\frac{1-j\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$$

따라서 $X(z)$를 부분분수 전개한 결과는 다음과 같다.

$$X(z) = \frac{0.5z}{z-(1+j\sqrt{3})/4} + \frac{0.5z}{z-(1-j\sqrt{3})/4}$$

$X(z)$의 분모의 복소수들을 극좌표로 나타내면 $(1 \pm j\sqrt{3})/4 = 0.5e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$가 되므로 $X(z)$는 다음과 같이 역변환된다.

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n u[n]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u[n]$$

이처럼 $X(z)$의 분모가 공액 복소근을 가지는 경우 위의 풀이와 같이 단순극을 갖는 부분분수 항으로 전개하면 복잡한 복소수 계산을 거쳐야 하므로 (책)식 (13.58)과 같이 2차 항으로 전개하는 쪽이 계산상 더 편하다.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{Az+B}{z^2+2bz+a^2} = \frac{A(z-b)}{(z^2+2bz+a^2)} + \frac{Ab+B}{(z^2+2bz+a^2)} \qquad \text{(책)(13.58)}$$

그런 다음 (책)13.2절에서 구한 지수적으로 변동하는 정현파의 z 변환쌍 (책)식 (13.25)와 (책)식 (13.26)을 이용하여 역변환하면 된다. 그리고 필요하다면 삼각함수 합성 공식을 적용하여 코사인파 또는 사인파로 정리하는 쪽이 더 쉽고 효율적이다.

이 예의 경우 $X(z)$를 (책)식 (13.58)의 형태로 다시 쓰면 다음과 같으므로

$$X(z) = \frac{z(4z-1)}{4z^2-2z+1} = \frac{4z(z-0.5)}{4(z^2-0.5z+0.25)}$$

이를 (책)식 (13.25)와 비교하여 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{cases} 2a\cos(\Omega) = 0.5 \\ a^2 = 0.25 \end{cases}$$

위의 방정식을 a와 Ω에 대해 풀면

$$\begin{cases} a = 0.5 \\ \Omega = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

그러므로 $X(z)$의 역변환은 다음과 같이 된다.

$$x[n] = a^n(\cos\Omega n)u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u[n]$$

이 방법이 풀이 과정에 복소수 계산이 없으므로 좀 더 간편하다. ■

13.5 z 변환에 의한 차분 방정식 해석

4장에서 보았듯이 시스템 응답은 필요에 따라, 시스템을 동작하게 만드는 원인(자극)을 기준으로 '영입력 응답+영상태 응답'의 형태로 표현하거나, 시스템 모드의 포함 여부를 기준으로 '고유 응답+강제 응답' 형태로 표현할 수 있다.

차분 방정식의 풀이에 z 변환을 이용하면 어느 쪽으로든지 비교적 쉽게 시스템의 응답을 분리할 수 있다. 시스템 응답을 영입력 응답과 영상태 응답으로 분리하고자 할 경우는 차분 방정식의 z 변환 결과에서 입력에 의한 항과 초기 조건에 의한 항으로 분리하기만 하면 된다. 고유 응답과 강제 응답으로 분리하고자 할 경우는 차분 방정식을 z 변환하여 부분 분수로 전개한 결과에서 입력과 같은 꼴인 항과 아닌 항으로 나누면 된다.

■ **예제 C13-11 : z *변환을 이용한 차분 방정식의 풀이***
다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 응답을 z 변환을 이용하여 구하러.
단 입력은 $x[n]=(2)^{-n}u[n]$이고, 초기 조건은$y[-1]=11/6$, $y[-2]=37/36$ 이다.

$$y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=3x[n+1]+5x[n]$$

<풀이>
주어진 차분 방정식이 선행 연산자 형으로 표현되어 있으므로 해를 구하기 위하여 z 변환의 시간 선행(좌측 이동) 성질을 사용하는 것이 적절한 것처럼 보이지만, 이 성질을 이용하기 위해서는 초기 조건이 $y[0]$, $y[1]$으로 주어져야 한다. 그러나 문제에는 $y[-1]$, $y[-2]$이 주어져 있으므로 차분 방정식을 지연 연산자 형으로 표현하고 z 변환의 시간 지연(우측 이동) 성질을 사용하여 푸는 것이 낫다. 그렇게 하지 않으려면, 6장에서 살펴본 것처럼 반복 대입법을 사용하여 $y[-1]$, $y[-2]$으로부터 $y[0]$, $y[1]$을 구한 뒤 시간 선행 성질을 적용해야 한다.

주어진 차분 방정식을 지연 연산자 형으로 표현하면 다음과 같다.

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=3x[n-1]+5x[n-2]$$

시간 지연 성질을 사용하여 이 방정식의 z 변환을 구하면,

$$\begin{aligned}&Y(z)-5(z^{-1}Y(z)+y[-1])+6(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])\\&=3z^{-1}X[z]+5z^{-2}X(z)\end{aligned}$$

이를 다시 정리하면

$$(1-5z^{-1}+6z^{-2})Y(z)-5y[-1]+6z^{-1}y[-1]+6y[-2]=(3z^{-1}+5z^{-2})X(z)$$

위 식의 우변에 $x[-1]$, $x[-2]$ 항들이 포함되지 않은 이유는 입력 신호 $x[n]$이 인과 신호

여서 $n<0$에서의 값들을 고려할 필요가 없기 때문이다.

입력 신호 $x[n]$의 z 변환은 다음과 같으므로

$$X(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

이와 주어진 초기 조건을 대입하여 차분 방정식을 z 변환한 것을 정리하면 다음과 같다.

$$(z^2-5z+6)Y(z)-(3z^2-11z)=\frac{(3z+5)z}{z-0.5}$$

이를 $Y(z)$에 대해 정리하면

$$Y(z)=\frac{(3z^2-11z)}{(z^2-5z+6)} \quad + \quad \frac{(3z+5)z}{(z^2-5z+6)(z-0.5)}$$

위 식의 우변의 첫 번째 항은 초기 조건에 의한 응답 성분이고 두 번째 항은 입력에 의한 응답 성분이다. 그러므로 이를 각각 부분 분수 전개하면

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z}&=\frac{(3z-11)}{(z^2-5z+6)} \quad + \quad \frac{(3z+5)}{(z^2-5z+6)(z-0.5)}\\&=\left[\frac{5}{z-2}-\frac{2}{z-3}\right] \quad + \quad \left[\frac{26}{15}\left(\frac{1}{z-0.5}\right)-\frac{22}{3}\left(\frac{1}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{1}{z-3}\right)\right]\end{aligned}$$

따라서 $Y(z)$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}Y(z)&=\underbrace{\left[\frac{5z}{z-2}-\frac{2z}{z-3}\right]}_{\text{영입력 응답}} \quad + \quad \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)-\frac{22}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{영상태 응답}}\\&=\underbrace{\left[\frac{5z}{z-2}-\frac{2z}{z-3}-\frac{22}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right)+\frac{28}{5}\left(\frac{z}{z-3}\right)\right]}_{\text{고유 응답}} \quad + \quad \underbrace{\left[\frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)\right]}_{\text{강제 응답}}\end{aligned}$$

위 식의 두 번째 등식은 영상태 응답에 포함되어 있는 시스템 모드 항들을 모두 영입력 응답 쪽으로 옮겨서 얻어진 결과이다.

'영입력 응답 + 영상태 응답'의 형태로 출력 $y[n]$을 구하려면 위 식의 첫 번째 등식을 z 역변환하면 된다.

$$y[n]=[5(2)^n-2(3)^n]u[n]+\left[-\frac{22}{3}(2)^n+\frac{28}{5}(3)^n+\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n]$$

'고유 응답 + 강제 응답'의 형태로 출력 $y[n]$을 구하려면 위 식의 두 번째 등식을 역 z 변환하면 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \left[5(2)^n - 2(3)^n - \frac{22}{3}(2)^n + \frac{28}{5}(3)^n\right]u[n] + \left[\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n] \\ &= \left[-\frac{7}{3}(2)^n + \frac{18}{5}(3)^n\right]u[n] + \left[\frac{26}{15}(0.5)^n\right]u[n] \end{aligned}$$

이렇게 얻어진 '고유 응답 + 강제 응답' 형태의 출력이 6장에서 배운 시간 영역에서 고전적 해법으로 차분 방정식을 풀었을 때 얻어지는 해이다. ■

13.6 전달 함수

13.6.1 전달 함수의 개요

■ 예제 C13-12 : *전달 함수로부터 차분 방정식 구하기*
다음의 전달 함수로 표현되는 LTI 시스템의 차분 방정식 표현을 구하라.

$$H(z)=\frac{5z+2}{z^2+3z+2}$$

<풀이>
분자와 분모 모두를 z^2으로 나누어 $H(z)$를 z^{-1}의 다항식으로 바꾸면

$$H(z)=\frac{5z^{-1}+2z^{-2}}{13z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

이다. 이로부터 다음의 등식을 얻을 수 있다.

$$(1+3z^{-1}+2z^{-2)}Y(z)=(5z^{-1}+2z^{-2})X(z)$$

따라서 이를 z 역변환하여 다음과 같이 시스템의 차분 방정식을 구한다.

$$y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=5x[n-1]+2x[n-2]$$

■

13.6.2 전달 함수의 극과 영점

■ 예제 C13-13 : *순허극을 갖는 시스템의 안정도*
2개의 순허극을 가지는 인과 LTI 시스템의 전달 함수가 다음과 같다고 한다. 이 시스템의 안정도를 판별하라.

$$H(z)=\frac{2z^2}{(z-ja)(z+ja)}=\frac{z}{z-ja}+\frac{z}{z+ja}$$

<풀이>
$H(z)$를 역변환하면 다음과 같이 임펄스 응답 $h[n]$이 얻어진다.

$$h[n]=((ja)^n+(-ja)^n)u[n]=\left(\left(ae^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n+\left(ae^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^n\right)u[n]$$
$$=a^n\left(e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)u[n]=2a^n\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$$

따라서 $|a|<1$이면 $h[n]$은 0으로 수렴하고, $|a|=1$이면 $h[n]$은 정현파로 순수하게 진동하며, $|a|>1$이면 $h[n]$은 ∞로 발산한다. 시스템의 극이 $z=\pm ja$이므로, 결국 극의 위치에 따라 시스템의 안정도가 달라진다. 즉 극이 단위원 안에 있으면 안정, 단위원 위에 있으면 임계 안정, 단위원 밖에 있으면 불안정한 시스템이 된다. 안정, 불안정으로 구분해야만 할 경우, 임계 안정은 (책)식 (13.79)의 안정도 조건을 만족시키지 못하므로 불안정으로 판별하면 된다. ■

13.6.3 인과성

인과 LTI 시스템의 임펄스 응답은 $h[n]=0,\ n<0$을 만족한다. 다음과 같은 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템을 생각해 보자.

$$y[n]=x[n+n_0] \tag{C13.10}$$

식 (C13.10)의 시스템은 시간에 대한 선행 요소로서 미래의 입력에 의해 현재의 출력이 결정되므로 비인과 시스템이다. z 변환하여 전달 함수를 구하면 다음과 같다.

$$H(z)=z^n \tag{C13.11}$$

따라서 전달함수 $H(z)$에 z^n의 항이 있으면 비인과 시스템임을 알 수 있다. 이를 확실히 이해하기 위해 다음과 같이 주어진 전달 함수를 생각해 보자.

$$H(z)=\frac{z^2+0.4z+0.9}{z-0.6}=z+\frac{z+0.9}{z-0.6} \tag{C13.12}$$

이 시스템은 물리적으로 구현이 가능한 1차 시스템에 병행하여 1차 선행 요소 z가 포함되어 있으므로 비인과적이다. 이런 선행 요소 항은 $H(z)$의 분자가 분모보다 고차이기 때문에 나타난다. 따라서 **시스템이 인과성을 만족하기 위해서는 전달 함수의 분자가 분모보다 고차일 수 없다**는 결론을 내릴 수 있다. 만약 전달 함수가 다음과 같이 z^{-1}의 다항식의 비로 표현될 경우는 $a_0\neq 0$이어야 시스템의 인과성 조건을 충족시킨다.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_qz^{-q}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_pz^{-p}} \tag{C13.13}$$

식 (C13.13)의 분모, 분자에 z^n을 곱해 z의 다항식으로 바꾸면 이를 확인할 수 있다.

■ 예제 C13-14 : *시스템의 인과성과 안정도*

다음의 전달 함수로 표현되는 LTI 시스템이 있을 때, 이 시스템이 인과이기 위한 수렴 영역의 조건과 그때의 임펄스 응답을 구하라.

$$H(z) = \frac{z(3z-4)}{z^3 - 3.5z + 1.5}$$

<풀이>

전달 함수를 부분 분수로 전개하면 다음과 같다.

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{2z}{z-3}$$

인과 시스템이 되려면 임펄스 응답이 $h[n]=0,\ n<0$을 만족해야 한다. 이는 $h[n]$이 우편향 신호임을 의미한다. 따라서 수렴 영역은 $|z|>0.5$와 $|z|>3$을 동시에 만족해야 하므로 $|z|>3$이 수렴 영역이다. 이 수렴 영역 조건 아래 부분 분수로 전개된 $H(z)$를 역변환하면

$$h[n] = (0.5)^n u[n] + 2(3)^n u[n]$$

으로 임펄스 응답이 구해진다. 이 임펄스 응답은 인과적이긴 하나. $(3)^n u[n]$항으로 인해 값이 발산하게 되므로 불안정하다.

이번에는 시스템이 안정하기 위한 수렴 영역의 조건과 그때의 임펄스 응답을 구해보자. 안정한 시스템이 되려면 수렴 영역이 단위원을 포함해야만 하는데, 주어진 전달 함수가 가질 수 있는 3가지 수렴 영역 중 이를 만족하는 것은 $0.5<|z|<3$의 경우뿐이다. 그러므로 임펄스 응답은 다음과 같이 인과 신호와 비인과 신호의 합이 된다.

$$h[n] = (0.5)^n u[n] - 2(3)^n u[-n-1]$$

$n<0$에 대해 $(3)^n<1$이므로 임펄스 응답은 안정한 대신 $(3)^n u[-n-1]$항으로 인해 비인과이다.

이 예에서 보듯이, 전달 함수의 극이 단위원 내부와 외부로 나뉘어 있는 시스템은 인과성과 안정성을 동시에 만족시킬 수가 없다. ■

13.7 전달 함수와 주파수 응답의 관계

고유 함수와 전달 함수 및 주파수 응답의 관계

전달 함수와 주파수 응답을 고유 함수의 개념으로 접근하여 설명할 수 있다. 이산 LTI 시스템의 고유 함수는 z^n이 되는데, 시스템 임펄스 응답이 $h[n]$이라면, 입력 z^n에 대한 시스템의 출력은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * z^n = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k} \\ &= H(z) z^n \end{aligned} \tag{C13.14}$$

따라서, 전달 함수 $H(z)$는 임펄스 응답의 z 변환으로서, 지수 함수 입력 신호 z^n에 대한 출력 신호의 비로 정의할 수 있다. 즉

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} = \left. \frac{y[n]}{x[n]} \right|_{x[n] = z^n} \tag{C13.15}$$

이제 전달 함수에 대한 이상의 결과를 이용하여 주파수 응답에 대해서 살펴보기로 하자. 주파수 응답은 입력의 주파수 변화에 대한 시스템의 응답 특성이므로 결국 입력 정현파에 대한 출력 정현파의 진폭과 위상 변화를 나타낸 것이다.

정현파 입력 $x[n] = \cos(\Omega n)$에 대한 이산 LTI 시스템의 응답을 구해보자. 오일러 공식에 의해 $\cos(\Omega n) = (e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n})/2$이고, 식 (C13.14)에서 지수 함수 z^n에 대한 시스템 응답이 $H(z) z^n$으로 주어지므로, $z = e^{\pm j\Omega}$라 두면 시스템 응답은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}\left(H(z) z^n \big|_{z = e^{j\Omega}} + H(z) z^n \big|_{z = e^{-j\Omega}} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} + H(e^{-j\Omega}) e^{-j\Omega n} \right) \end{aligned} \tag{C13.16}$$

여기서 $H(e^{j\Omega})$는 Ω의 함수이므로 간단히 $H(\Omega)$로 나타내기로 하면,

$$H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = \left. \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \right|_{z = e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \tag{C13.17}$$

즉 $H(\Omega)$는 $h[n]$의 이산 시간 푸리에 변환이 된다. $H(\Omega)$를 극좌표 형식으로 표현하면 $H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)}$이므로, 식 (C13.17)의 시스템 출력은 다음과 같이 된다.

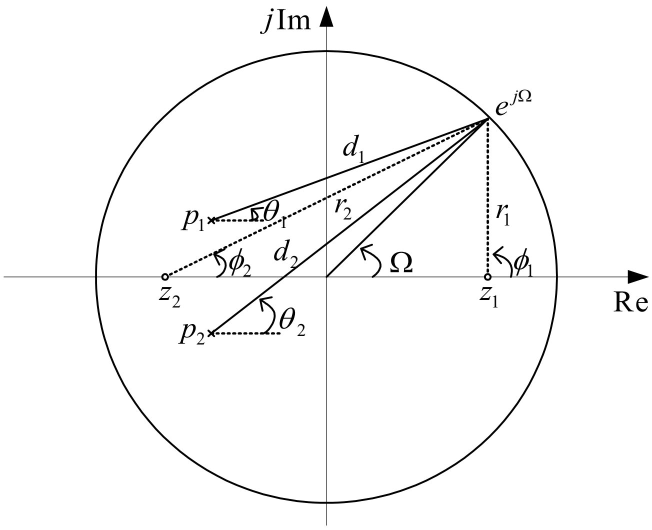
$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}\left[|H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)} e^{j\Omega n} + |H(\Omega)| e^{-j\angle H(\Omega)} e^{-j\Omega n} \right] \\ &= |H(\Omega)| \cos(\Omega n + \angle H(\Omega)) \end{aligned} \tag{C13.18}$$

이상의 결과는 책에서 살펴보았던 주파수 응답의 개념 및 전달 함수와의 관계와 정확히 일치하는 결과이다.

13.7.1 극과 영점에 대한 주파수 응답의 의존성

(책)식 (C13.83)과 (책)식 (C13.84)의 계산은 z 평면에서 그림을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다. [그림 C13-2]는 이에 대한 한 예이다. 그림에 나타낸 극과 영점을 갖는 전달 함수는 다음과 같다.

$$H(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} \tag{C13.19}$$



[그림 C13-2] 극과 영점에 의한 주파수 응답 계산

[그림 C13-2]를 보면 단위원 위의 점 $e^{j\Omega}$에 대한 극 p_1, p_2의 길이가 d_1, d_2이고 영점 z_1, z_2의 길이가 r_1, r_2이므로, $e^{j\Omega}$에서의 $H(z)$의 크기는 다음과 같다.

$$|H(\Omega)| = |H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{r_1 \cdot r_2}{d_1 \cdot d_2} \tag{C13.20}$$

또한 $e^{j\Omega}$에 대한 z_1, z_2의 각은 ϕ_1, ϕ_2이고, p_1, p_2의 각은 θ_1, θ_2이므로 $e^{j\Omega}$에서의 $H(z)$의 위상은 다음과 같다.

$$\angle H(\Omega) = \angle H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = (\phi_1+\phi_2)-(\theta_1+\theta_2) \tag{C13.21}$$

단위원 위에 점 $e^{j\Omega}$을 두고 Ω 값을 변화시키면서 모든 Ω 값에 대해 이 과정을 반복하면

$H(\Omega)$를 구할 수 있다. Ω가 커지며 단위원을 한 바퀴 돌 때마다 같은 값이 반복되어 계산되므로, 이산 시스템의 주파수 응답은 2π를 주기로 반복된다.

■ **예제 C13-15 : *전달 함수를 이용한 주파수 응답 계산***

다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 주파수 응답과 정현파 $\cos\left(\frac{\pi}{6}n - 0.2\right)$에 대한 시스템 출력을 구하라.

$$y[n] - 0.8y[n-1] = x[n]$$

<풀이>

위의 차분 방정식을 z 변환하여 전달 함수를 구하면 다음과 같다.

$$H(z) = \frac{z}{z-0.8} = \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$

따라서, 주파수 응답은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{1-0.8e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-0.8(\cos\Omega - j\sin)} \\ &= \frac{1}{(1-0.8\cos\Omega) + j0.8\sin\Omega} \end{aligned}$$

이때, 진폭 응답과 위상 응답은 다음과 같이 주어진다.

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-0.8\cos\Omega)^2 + (0.8\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\Omega}}$$

$$\angle H(\Omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{0.8\sin\Omega}{1-0.8\cos\Omega}\right]$$

[그림 C13-3]은 이 시스템의 진폭 및 위상 응답을 그린 것이다.

이제 주어진 입력에 대하여 진폭 및 위상 응답을 계산하자. 위 식에 $\Omega = \pi/6$을 대입하여 다음을 얻는다. 이 값들은 [그림 C13-3]에서 $\Omega = \pi/6$에서의 값을 읽어서 바로 구할 수도 있다.

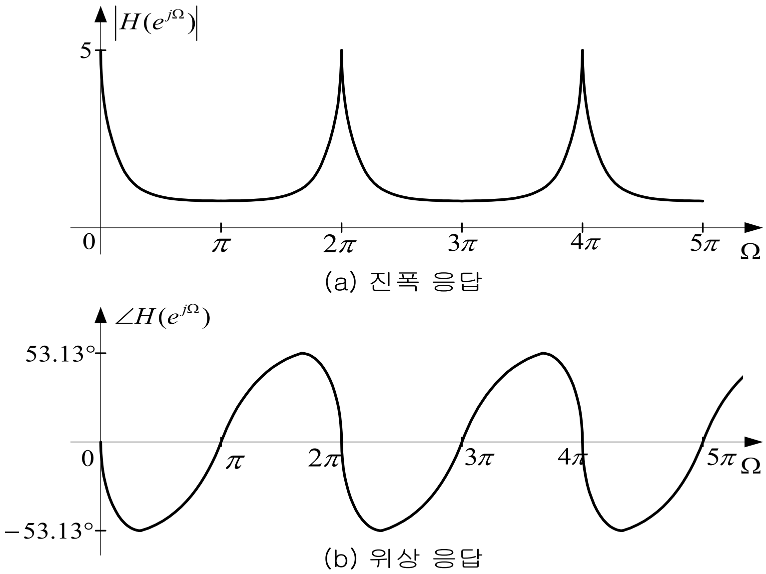
$$\left|H\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1.64 - 1.6\cos\frac{\pi}{6}}} = 1.983$$

$$\angle H\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\tan^{-1}\left[\frac{0.8\sin\frac{\pi}{6}}{1-0.8\cos\frac{\pi}{6}}\right] = -0.916$$

따라서 시스템 응답은 다음과 같다.

$$y[n]=1.983\cos\left(\frac{\pi}{6}n-0.2-0.916\right)=1.983\cos\left(\frac{\pi}{6}k-1.116\right)$$

■



[그림 C13-3] [예제 C13-15]의 시스템 주파수 응답

13.7.2 극과 영점에 따른 주파수 선택 특성

전달 함수의 극과 영점의 위치에 따라 주파수 응답이 달라지는 것을 간단한 예를 통해 알아보기로 하자.

다음과 같이 전달 함수가 실수 극 하나만 갖는 1차 시스템은 가장 간단한 시스템이다.

$$H(z)=\frac{z}{z-a} \qquad \text{(C13.22)}$$

$z=e^{j\Omega}$로 두어 주파수 응답의 진폭 응답을 계산하면 다음과 같다.

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\Omega)^2+(a\sin\Omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega}} \qquad \text{(C13.23)}$$

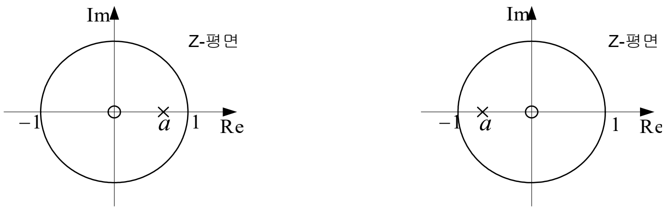
시스템이 안정하려면 $|a|<1$이어야 하고, 이때 극은 단위원 내의 실수축 상에 존재하게 되는데 a가 양일 때와 음일 때의 두 경우로 나눌 수 있다. $0<a<1$의 경우 진폭 응답의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

$$\begin{cases} |H(\Omega)|_{\max} = |H(0)| = \dfrac{1}{1-a}, & 0 < a < 1 \\ |H(\Omega)|_{\min} = |H(\pi)| = \dfrac{1}{1+a}, & 0 < a < 1 \end{cases} \tag{C13.24}$$

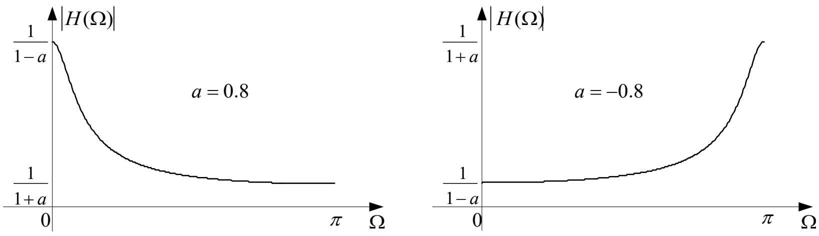
따라서 $\Omega = 0$인 저주파에서 최대 이득을 가지고 $\Omega = \pi$인 고주파에서 최소 이득이 되는 저역 통과 필터에 해당한다. $-1 < a < 0$의 경우에는 진폭 응답이 이와 반대로 나타난다.

$$\begin{cases} |H(\Omega)|_{\max} = |H(\pi)| = \dfrac{1}{1+a}, & -1 < a < 0 \\ |H(\Omega)|_{\min} = |H(0)| = \dfrac{1}{1-a}, & -1 < a < 0 \end{cases} \tag{C13.25}$$

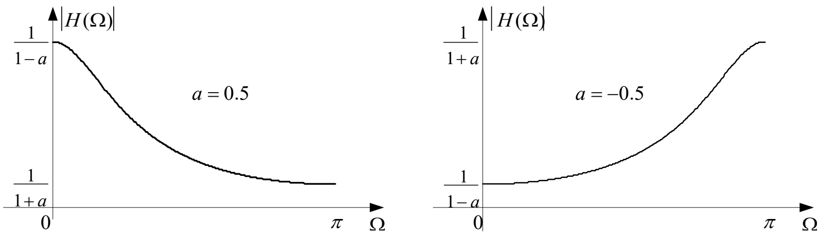
따라서 고주파인 $\Omega = \pi$에서 이득이 최대가 되고 저주파인 $\Omega = 0$에서 이득이 최소가 되는 고역 통과 필터가 된다. 이러한 결과는 [그림 C13-4]에 나타낸 진폭 응답에서도 확인할 수 있다. 그리고 두 경우 모두 극의 위치가 단위원에 가까울수록 최대 이득이 증가하고 대역폭이 좁아져서 주파수 선택 효과가 더욱 커진다는 것을 그림 [그림 C13-4(b)]와 [그림 C13-4(c)]를 비교하면 알 수 있다.



(a) z-평면 상의 극의 위치



(b) 극이 단위원에 가까운 경우의 진폭 응답



(c) 극이 단위원에서 먼 경우의 진폭 응답

[그림 C13-4] 1차 극의 위치에 따른 진폭 응답 특성의 변화

이상의 결과로부터 전달 함수의 형태가 같다 하더라도 극의 위치에 따라 주파수 응답의 형태가 달라지고, 그 결과 주파수 선택 특성이 달라진다는 사실을 알 수 있다.

일반적으로 IIR 필터는 극이 z 평면의 1, 4분면에 있으면 저역 통과 필터가 되고, 2, 3분면에 있으면 고역 통과 필터가 된다. 이와 반대로 FIR 필터는 영점이 z 평면의 1, 4분면에 위치하면 고역 통과 필터가 되고, 2, 3분면에 위치하면 저역 통과 필터가 된다.