제11 장

이산 시간 푸리에 급수

책에서 이 장의 주제인 이산 시간 푸리에 급수에 대해서 필요한 내용들을 상세하게 설명하였으므로 특별히 보충할 내용이 별로 없다. 따라서 간단한 보충 예제를 소개하여 이해를 돕도록 하였다.

책의 '1절 이산 정현파 신호의 특성' 과 관련하여 2π주기성에 대한 설명을 보충하였다.

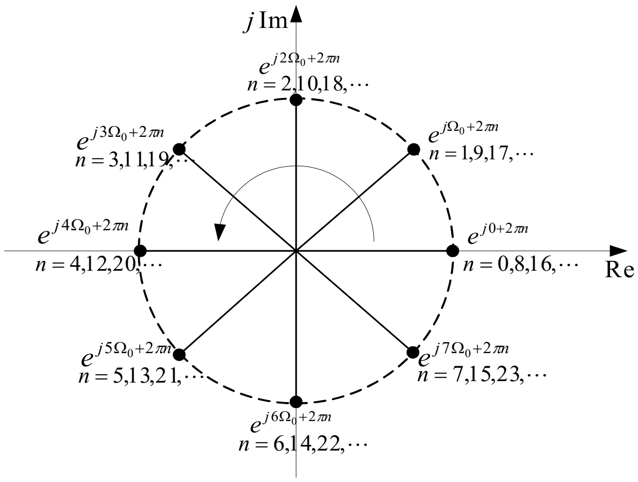
책의 '2절 이산 시간 푸리에 급수의 개요'와 관련하여 간단한 예제들을 추가하였다.

책의 '3절 이산 시간 푸리에 급수의 성질'과 관련하여 주요한 성질을 요약 정리한 표와 예제를 추가하였다.

11.1 이산 정현파 신호의 특성

이산 정현파 신호의 주기성

크기가 1이고 $\Omega_0 = 2\pi/8$로 주기 신호가 되기 위한 (책)식 (3.37)의 조건을 만족하는 복소 정현파 $e^{j\Omega_0 n}$은 [그림 C11-1]에 나타낸 것처럼 n이 커짐에 따라 복소 평면을 반시계 방향으로 돌면서 한 번에 위상이 Ω_0씩 자리 이동을 한다. 따라서 n이 8번 증가하면 한 바퀴 돌아서 정확히 회전 직전의 원래 위치로 되돌아오게 된다. 즉, 주기가 $N=8$로 같은 패턴을 반복한다. 또한 주파수가 $\Omega_0 + 2\pi$인 복소 정현파 $e^{j(\Omega_0+2\pi)n}$는 n이 1, 2, 3, $\cdots$으로 커짐에 따라 단위원을 1, 2, 3, $\cdots$바퀴 돌아 주파수가 Ω_0인 복소 정현파와 똑같이 위상이 Ω_0인 점에 위치한다. 따라서 두 신호는 완전히 일치하여 구분할 수가 없다. 즉, 주파수 Ω_0에 2π를 더하는 것은 단지 단위원을 몇 바퀴 더 돌게 만들 뿐이다. 그러므로 단위원을 한 바퀴 도는 데 필요한 주파수 범위만 고려하면 모든 이산 (복소) 정현파 신호를 빠짐없이 표현할 수 있다.



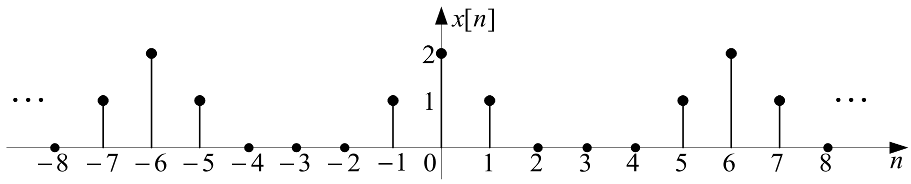
[그림 C11-1] 복소 정현파의 주기성 예

11.2 이산 시간 푸리에 급수의 개요

11.2.1 이산 시간 푸리에 급수

■ 예제 C11-1 : *이산 주기 신호의 푸리에 급수와 스펙트럼*

[그림 C11-2]의 이산 주기 신호에 대해 푸리에 급수 표현과 스펙트럼을 구하라.



[그림 C11-2] [예제 C11-1]의 이산 주기 신호

<풀이>

이 신호의 주기는 $N=6$이며, 기본 주파수는 $\Omega_0=\pi/3$이다. 신호가 우대칭이므로 (책)식 (11.10)에서 $n=-3$부터 $n=2$까지 총합을 취하는 것이 좋다.

$$X_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-3}^{2}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{6}\left(e^{j\frac{k\pi}{3}}+2+e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right)=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{k\pi}{3}\right)$$

이 결과에 $k=0, 1, ,2, 3, 4, 5$를 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$X_0=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{0\pi}{3}\right)=\frac{2}{3} \qquad X_3=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{3\pi}{3}\right)=0$$

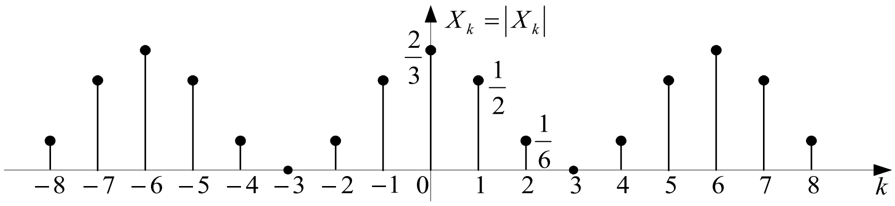
$$X_1=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \qquad X_4=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

$$X_2=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{6} \qquad X_5=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$k=-3, -2, -1, 0, 1, ,2$을 넣어도 마찬가지이다. 예를 들어, $k=-2$이면 다음과 같다.

$$X_{-2}=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{-2\pi}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(2+2\cos\frac{4\pi}{3}\right)=X_4$$

푸리에 계수 X_k는 모두 양의 실수이므로 곧 진폭 스펙트럼이다($X_k=|X_k|$). 이를 [그림 C11-3]에 나타내었는데, 주기 6으로 반복되고 있음을 확인할 수 있다. ■



[그림 C11-3] [예제 C11-1]의 이산 주기 신호의 스펙트럼

■ 예제 C11-2 : *스펙트럼에 의한 이산 주기 신호의 합성*
[그림 C11-3]의 스펙트럼이 주어질 때, 이로부터 대응되는 이산 신호를 구하라.

<풀이>
우선 [그림 C11-3]의 스펙트럼이 주기가 6인 선스펙트럼이므로, 대응되는 신호가 주기 $N=6$인 주기 신호이며 $\Omega_0=\pi/3$임을 알 수 있다. $0 \le k \le 3(0 \le \Omega \le \pi)$에 대해 $k=0$ $(\Omega=0)$에서 $|X_0|=2/3$, $k=1(\Omega=\Omega_0)$에서 $|X_1|=1/2$, $k=2(\Omega=2\Omega_0)$에서 $|X_2|=1/6$이고 위상은 모두 0인 주파수 성분을 가지므로 $x[n]$은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x[n] &= |X_0| + 2|X_1|\cos(\Omega_0 n + \angle X_1) + 2|X_2|\cos(2\Omega_0 n + \angle X_2) \\ &= \frac{2}{3} + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \frac{1}{3}(\cos\frac{2\pi}{3}n) \end{aligned}$$

이처럼 **직류 항은 그대로 두고 양의 주파수의 스펙트럼을 크기가 2배인 정현파로 바꾸면 (책)식 (11.9)의 계산을 직접 하지 않고서도 간편하게 합성 신호를 얻을 수 있다.** 이 결과는 다음과 같이 (책)식 (11.9)의 총합 구간을 $\langle N \rangle=[-3, 2]$로 하여 계산한 것에 해당한다.

$$\begin{aligned} x[n] &= X_{-3}e^{-j\frac{3\pi}{3}n} + X_{-2}e^{-j\frac{2\pi}{3}n} + X_{-1}e^{-j\frac{\pi}{3}n} + X_0 e^{j\frac{0\pi}{3}n} + X_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + X_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n} \\ &= \frac{2}{3}e^{j\frac{0\pi}{3}n} + \frac{1}{2}(e^{-j\frac{\pi}{3}n} + e^{j\frac{\pi}{3}n}) + \frac{1}{6}(e^{-j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{2\pi}{3}n}) + 0\,e^{-j\frac{3\pi}{3}n} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}2\cos(\frac{\pi}{3}n) + \frac{1}{6}2\cos(\frac{2\pi}{3}n) = \frac{2}{3} + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \frac{1}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}n) \end{aligned}$$

다음과 같이 총합 구간을 $\langle N \rangle=[0, 5]$으로 해도 같은 결과가 얻어지지만, 계산이 더 번거롭다. 그러므로 총합 구간은 되도록 오일러 공식을 적용하기 쉽도록 잡는 것이 좋다.

$$x[n] = X_0 e^{j0\frac{\pi}{3}n} + X_1 e^{j\frac{\pi}{3}n} + X_2 e^{j\frac{2\pi}{3}n} + X_3 e^{j\frac{3\pi}{3}n} + X_4 e^{j\frac{4\pi}{3}n} + X_5 e^{j\frac{5\pi}{3}n}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{j\frac{5\pi}{3}n}) + \frac{1}{6}(e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{4\pi}{3}n})$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n}) + \frac{1}{6}(e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n})$$

$$= \frac{2}{3} + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \frac{1}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}n)$$

■

11.3 이산 시간 푸리에 급수의 성질

7장과 8장에서 보았듯이 기본적으로 푸리에 급수와 푸리에 변환의 성질은 비슷하다. 그러므로 DTFS의 성질은 중요한 결과만 간단히 [표 C11-1]에 정리하고, 12장에서 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)의 성질을 다룰 때 상세히 살펴보기로 한다.

[표 C11-1] 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)의 주요 성질

	성질	이산 시간 푸리에 급수쌍
1	주기성	$x[n+mN]=x[n] \Leftrightarrow X_{k+mN}=X_k$
2	시간 이동	$x[n-n_0] \Leftrightarrow X_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$
3	시간 컨벌루션	$x[n]\circledast y[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x[m]y[n-m] \Leftrightarrow NX_k Y_k$
4	주파수 컨벌루션	$x[n]y[n] \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1}X_m Y_{k-m}=X_k\circledast Y_k$
5	파스발 정리	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x[n]\rvert^2=\sum_{k=0}^{N-1}\lvert X_k\rvert^2$
6	대칭성	$X_k=X_{-k}^*=X_{N-k}^*,\quad x[n]$은 실수
		$\begin{cases}\lvert X_k\rvert=\lvert X_{-k}\rvert, & x[n]\text{은 실수}\\ \angle X_{k=}-\angle X_{-k}, & x[n]\text{은 실수}\end{cases}$

주) 컨벌루션 성질의 ⊛ 기호는 원형 컨벌루션을 나타내는 것으로 12장에서 상세히 다룰 것이다.

■ 예제 C11-3 : *임펄스 열에 의한 시간 이동 성질*

$\delta[n]$을 간격 N으로 세워놓은 임펄스 열의 푸리에 급수 표현을 구하라.

<풀이>

임펄스 열은 주기가 N인 주기 신호로, 기본 주파수는 $\Omega_0=2\pi/N$이다. 이 신호의 푸리에 급수 표현의 푸리에 계수는 다음과 같이 계산한다.

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}$$

임펄스 열이 n_0만큼 시간 지연되면, 푸리에 계수는 다음과 같이 달라진다.

$$X_k'=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n-n_0]e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}e^{-jk\Omega_0 n_0}$$

두 식을 비교하면, 시간 지연에 의해 진폭 스펙트럼은 변하지 않고 위상 스펙트럼만 주파수에 비례하여 기울기 n_0로 선형적으로 감소한다. 그런데 N만큼 시간 이동하면 다시 원래 신

호가 되므로, 시간 이동 효과는 $n_0 \bmod N$으로 최대 N을 넘지 못하고 고조파의 위상 변화도 2π, 즉 $\pm\pi$를 넘지 않는다. ■