3장 연습문제 정답

01.

p : 두 정수 m, n은 홀수이다.　　　　q : $m-n$은 짝수이다.

[직접증명법] 두 홀수의 차는 짝수이다. (≡ 두 정수 m, n이 홀수이면 $m-n$은 짝수이다.)
홀수의 정의에 따라 $m=2k+1(k\in\mathbb{Z})$, $n=2l+1(l\in\mathbb{Z})$일 때,

$$m-n=(2k+1)-(2l+1)=2k-2l=2\underbrace{(k-l)=2a}_{k-l\text{을 } a\text{로 치환}}$$

위 결과에서 $2a$는 짝수의 정의에 따른 표현이다.
∴ 명제 '두 홀수의 차는 짝수이다'는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: $m-n$은 짝수가 아니다(홀수이다).
$p\wedge\neg q$: 두 정수 m, n이 홀수이고 $m-n$은 짝수가 아니다(홀수이다).
홀수의 정의에 따라 $m=2k+1(k\in\mathbb{Z})$, $n=2l+1(l\in\mathbb{Z})$일 때,

$$m-n=(2k+1)-(2l+1)=2k-2l=2\underbrace{(k-l)=2a}_{k-l\text{을 } a\text{로 치환}}$$

위 결과에서 $2a$는 짝수의 정의에 따른 표현이다.
∴ 모순명제 $p\wedge\neg q$ '두 정수 m, n이 홀수이고 $m-n$은 짝수가 아니다(홀수이다)'는 거짓(F)
∴ 명제 $\neg(p\wedge\neg q)$은 참(T)이다.
∴ 본 명제 '두 홀수의 차는 짝수이다'는 참(T)이다.

02.

풀이 생략

03.

풀이 생략

04.

p : 정수 a에 대하여 a는 짝수이다.　　　　q : a^2도 짝수이다.

[직접증명법] 짝수의 정의에 따라 $a=2k(k\in\mathbb{Z})$일 때,

$$a^2=(2k)^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)=2m}_{2k^2\text{을 } m\text{으로 치환}}$$

위 결과에서 $2m$은 짝수의 정의에 따른 표현이다.
∴ 명제 '정수 a에 대하여 a가 짝수이면, a^2도 짝수이다'는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: a^2는 짝수가 아니다(홀수이다).

짝수의 정의에 따라 $a = 2k(k \in \mathbb{Z})$일 때,

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2) = 2m}_{2k^2\text{을 } m\text{으로 치환}}$$

위 결과에서 $2m$은 짝수의 정의에 따른 표현이다.

∴ 모순명제 $p \wedge \neg q$ '정수 a에 대하여 a는 짝수이고, a^2는 짝수가 아니다(홀수이다)'는 거짓(F)

∴ 명제 $\neg(p \wedge \neg q)$은 참(T)이다.

∴ 본 명제 '정수 a에 대하여 a가 짝수이면, a^2도 짝수이다'는 참(T)이다.

05.

풀이 생략

06.

풀이 생략

07.

p : 정수 a가 4의 배수이다. q : $3a^2 + 10a$도 4의 배수이다.

[직접증명법] 조건 p에 의해 $a = 4k(k \in \mathbb{Z})$일 때,

$$3a^2 + 10a = 3(4k)^2 + 10(4k) = 3(16k^2) + 10(4k) = 48k^2 + 40k = 4\underbrace{(12k^2 + 10k) = 4m}_{12k^2 + 10k\text{를 } m\text{으로 치환}}$$

$4m$은 4로 나누어떨어지므로 $3a^2 + 10a$도 4로 나누어떨어진다.

∴ 명제 '정수 a가 4의 배수이면, $3a^2 + 10a$도 4의 배수이다'는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: $3a^2 + 10a$도 4의 배수가 아니다.

조건 p에 의해 $a = 4k(k \in \mathbb{Z})$일 때,

$$3a^2 + 10a = 3(4k)^2 + 10(4k) = 3(16k^2) + 10(4k) = 48k^2 + 40k = 4\underbrace{(12k^2 + 10k) = 4m}_{12k^2 + 10k\text{를 } m\text{으로 치환}}$$

$4m$은 4로 나누어 떨어지므로 $3a^2 + 10a$도 4로 나누어떨어진다.

∴ 모순명제 $p \wedge \neg q$ '정수 a가 4의 배수이고, $3a^2 + 10a$도 4의 배수가 아니다'는 거짓(F)

∴ 명제 $\neg(p \wedge \neg q)$은 참(T)이다.

∴ 명제 '정수 a가 4의 배수이면, $3a^2 + 10a$도 4의 배수이다'는 참(T)이다.

08.
풀이 생략

09.
p : 정수 m, n에 대해 $m-n$이 짝수이다.　　　　q : m^3-n^3이 짝수이다.

[직접증명법] $m-n=2k(k\in Z)$이며 $m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)$이다.

$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)=2k(m^2+mn+n^2)$이므로 m^3-n^3도 짝수이다.

$\therefore$ '정수 m, n에 대해 $m-n$이 짝수이면, m^3-n^3이 짝수이다'는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: m^3-n^3이 홀수이다.

$p\wedge\neg q$: 정수 m, n에 대해 $m-n$이 짝수이고 m^3-n^3은 홀수이다.

$m-n=2k(k\in Z)$이며 $m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)$이다.

$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)=2k(m^2+mn+n^2)$이므로 m^3-n^3도 짝수이다.

$\therefore$ 모순명제 $p\wedge\neg q$는 거짓(F)이다.

$\therefore$ '정수 m, n에 대해 $m-n$이 짝수이면, m^3-n^3이 짝수이다'는 참(T)이다.

10.
풀이 생략

11.
p : 정수 $a=5k+2$이다.　　　　q : a^2+1은 5로 나누어떨어진다.

[직접증명법] a^2+1에 $a=5k+2$를 대입하면,

$$a^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+4+1=25k^2+20k+5=5\underbrace{(5k^2+4k+1)}_{5k^2+4k+1\text{을 } m\text{으로 치환}}=5m$$

$5m$은 5로 나누어떨어지므로 a^2+1은 5로 나누어떨어진다.

$\therefore$ 명제 '정수 $a=5k+2$이면 a^2+1은 5로 나누어떨어진다'는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: a^2+1은 5로 나누어떨어지지 않는다.

a^2+1에 $a=5k+2$를 대입하면,

$$a^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+4+1=25k^2+20k+5=5\underbrace{(5k^2+4k+1)}_{5k^2+4k+1\text{을 } m\text{으로 치환}}=5m$$

$5m$은 5로 나누어떨어지므로 a^2+1은 5로 나누어떨어진다.

$\therefore$ 모순명제 $p\wedge\neg q$ '정수 $a=5k+2$이고, a^2+1은 5로 나누어떨어지지 않는다'는 거짓(F)

$\therefore$ 명제 $\neg(p\wedge\neg q)$은 참(T)이다.

$\therefore$ 본 명제 '정수 $a=5k+2$이면 a^2+1은 5로 나누어떨어진다'는 참(T)이다.

12.
풀이 생략

13.
풀이 생략

14.
풀이 생략

15.
p : a, b, c는 0이 아닌 정수이다. q : $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}$가 유리수이다.

[직접증명법] $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{abc}$ 이다.
a, b, c는 0이 아닌 정수이므로 $abc \neq 0$인 정수이다.
정수는 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀있으므로 $(ab)^2$, $(bc)^2$, $(ac)^2$은 모두 정수이다.
그러므로 유리수 정의에 의해 $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{abc}$ 는 유리수이다.
$\therefore$ "0이 아닌 정수 a, b, c에 대해 $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}$가 유리수이다."는 참(T)이다.

16.
p : 자연수 n은 소수이다. q : n은 완전수가 아니다.

[직접증명법] 소수는 완전수가 아니다. (≡자연수 n이 소수이면 n은 완전수가 아니다.)
소수는 1과 자기 자신 외의 다른 약수가 없는 자연수를 의미하므로, 소수인 자연수 n의 약수는 1과 n이다. n이 완전수라면 n의 약수 중 n 자신을 제외한 나머지 약수들의 합이 n이어야 하는데 n이 소수이면 n을 제외하고 남는 약수는 1뿐이므로 약수의 합이 n이 될 수 없다.
$\therefore$ 명제 '소수는 완전수가 아니다'는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: n은 완전수이다.
소수는 1과 자기 자신 외의 다른 약수가 없는 자연수를 의미하므로, 소수인 자연수 n의 약수는 1과 n이다. n이 완전수라면 n의 약수 중 n 자신을 제외한 나머지 약수들의 합이 n이어야 하는데 n이 소수이면 n을 제외하고 남는 약수는 1뿐이므로 약수의 합이 n이 될 수 없다.
$\therefore$ 모순명제 $p \wedge \neg q$ '자연수 n은 소수이고 n은 완전수이다.'는 거짓(F)
$\therefore$ 명제 $\neg(p \wedge \neg q)$은 참(T)이다.
$\therefore$ 명제 '소수는 완전수가 아니다'는 참(T)이다.

17.
p : 정수 a, b가 각각 완전제곱수이다. q : ab도 완전제곱수이다.

[직접증명법] 정수 a, b가 완전제곱수이므로 $a = k^2 (k \in Z)$, $b = l^2 (l \in Z)$이다.
$ab = k^2 l^2 = (kl)^2$이므로 ab도 완전제곱수이다.
$\therefore$ "정수 a, b가 각각 완전제곱수이면 ab도 완전제곱수이다."는 참(T)이다.

[모순증명법] $\neg q$: ab는 완전제곱수가 아니다.
$p \wedge \neg q$: 정수 a, b가 각각 완전제곱수이고 ab는 완전제곱수가 아니다.
정수 a, b가 완전제곱수이므로 $a = k^2 (k \in Z)$, $b = l^2 (l \in Z)$이다.
$ab = k^2 l^2 = (kl)^2$이므로 ab도 완전제곱수이다.
$\therefore$ 모순명제 $p \wedge \neg q$는 거짓(F)이다.
$\therefore$ "정수 a, b가 각각 완전제곱수이면 ab도 완전제곱수이다."는 참(T)이다.

18. **<<문제 수정>> $a \geq b$인 정수 a, b에 대하여 $a \geq 36$이고 $b \geq 36$이면 $a - b \geq 0$이다.**
풀이 생략

19.
풀이 생략

20.
풀이 생략

21.
[모순증명법] p : $\sqrt{7}$이 무리수이다. $\neg p$: $\sqrt{7}$이 무리수가 아니다(유리수이다)

$\sqrt{7}$이 유리수이면 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \frac{a}{b}\text{는 하한항으로 표현}) \cdots ①$$

식 ①의 양변을 제곱하고 양변에 b^2을 곱하자.

$$(\sqrt{7})^2 = 7 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$7b^2 = a^2 \cdots ②$$

식 ②에서 알 수 있듯이 a^2은 7의 배수이다. 따라서 a도 7의 배수이므로 $a=7k(k\in \mathbb{Z})$로 표현할 수 있다. 이를 식 ②에 대입하면 다음과 같다.

$$7b^2=a^2=(7k)^2=49k^2=7(7k^2)$$
$$b^2=7k^2 \cdots ③$$

그러므로 b도 7의 배수임을 알 수 있고 $b=7l(l\in \mathbb{Z})$로 표현할 수 있다. 그러면 $\frac{a}{b}$에서 공통 약수 7을 가지므로 식 ①에서 $\frac{a}{b}$가 하한항으로 표현된다고 가정한 것에 위배된다.

∴ 모순명제 $\neg p$ '$\sqrt{7}$이 무리수가 아니다(유리수이다)'는 거짓(F)이다.

∴ 본 명제 '$\sqrt{7}$이 무리수이다'는 참(T)이다.

<증명> a^2은 7의 배수이면 a도 7의 배수이다.

[대우증명법] a가 7의 배수가 아니면 a^2은 7의 배수가 아니다.

$a=7k+l(k,l\in Z, 0<l<7)$일 때

$l=1$이면 $a=7k+1$, $a^2=(7k+1)^2=49k^2+14k+1=7(7k^2+2k)+1$ ∴ 7의 배수가 아니다.

$l=2$이면 $a=7k+2$, $a^2=(7k+2)^2=49k^2+28k+4=7(7k^2+4k)+4$ ∴ 7의 배수가 아니다.

$l=3$이면 $a=7k+3$, $a^2=(7k+3)^2=49k^2+42k+9=7(7k^2+6k+1)+2$ ∴ 7의 배수가 아니다.

$l=4$이면 $a=7k+4$, $a^2=(7k+4)^2=49k^2+56k+16=7(7k^2+6k+2)+2$ ∴ 7의 배수가 아니다.

$l=5$이면 $a=7k+5$, $a^2=(7k+5)^2=49k^2+70k+25=7(7k^2+10k+3)+4$ ∴ 7의 배수가 아니다.

$l=6$이면 $a=7k+6$, $a^2=(7k+6)^2=49k^2+84k+36=7(7k^2+6k+5)+1$ ∴ 7의 배수가 아니다.

∴ 대우명제 'a가 7의 배수가 아니면 a^2은 7의 배수가 아니다.'는 참(T).

∴ 본 명제 'a^2은 7의 배수이면 a도 7의 배수이다.'는 참(T)

22.

[모순증명법] p : $\sqrt{2}$는 무리수이다.

q : $1+3\sqrt{2}$가 무리수이다. $\neg q$: $1+3\sqrt{2}$가 유리수이다.

$p\wedge \neg q$: $\sqrt{2}$는 무리수이고 $1+3\sqrt{2}$가 유리수이다.

$1+3\sqrt{2}$가 유리수라고 했으므로, $1+3\sqrt{2}=\frac{a}{b}(a,b\in Z,\ b\neq 0)$로 정의한다. 양변을 제곱하면

$(1+3\sqrt{2})^2=1+6\sqrt{2}+18=19+6\sqrt{2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$이고 좌변에 $\sqrt{2}$만 남기고 이항하면

$\sqrt{2}=\frac{a^2-19b^2}{6b^2}$이다. 유리수는 사칙연산에 대해 닫혀있고 $b\neq 0$이므로 $\frac{a^2-19b^2}{6b^2}\in Q$이지만

$\sqrt{2}\in I$이므로 $\sqrt{2}=\frac{a^2-19b^2}{6b^2}$이 성립될 수 없다.

∴ 모순명제 $p\wedge\neg q$는 참(T)이다.

∴ "$\sqrt{2}$가 무리수일 때, $1+3\sqrt{2}$가 무리수이다."는 참(T)이다.

23.

풀이 생략

24.

풀이 생략

25.

풀이 생략

26.

[대우증명법] 정수 a에 대하여 a^2이 짝수이면, a도 짝수이다.

$p \to q$: 정수 a에 대하여 a^2이 짝수이면, a도 짝수이다.

p : 정수 a에 대하여 a^2이 짝수이다.

$\neg p$: 정수 a에 대하여 a^2이 짝수가 아니다(홀수이다).

q : 정수 a는 짝수이다.

$\neg q$: 정수 a는 홀수이다.

$\neg q \to \neg p$: 정수 a가 홀수이면, a^2은 짝수가 아니다(홀수이다).

정수 a가 홀수이므로, $a = 2k+1(k \in \mathbb{Z})$로 정의할 수 있다.

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

a^2은 $2(2k^2+2k)+1$로 역시 홀수이다.

∴ 대우 명제 $\neg q \to \neg p$ '정수 a가 홀수이면, a^2은 짝수가 아니다(홀수이다)'는 참(T)이다.

∴ 본 명제 $p \to q$ '정수 a에 대하여 a^2이 짝수이면, a도 짝수이다'는 참(T)이다.

27.

[대우증명법] p : 정수 a^2이 3의 배수이다. q : a는 3의 배수이다.

$\neg p$: 정수 a^2이 3의 배수가 아니다. $\neg q$: a는 3의 배수가 아니다.

$\neg q \to \neg p$: 정수 a가 3의 배수가 아니면, a^2은 3의 배수가 아니다.

정수 a가 3의 배수가 아닌 경우는 $a = 3k+1$이거나 $a = 3k+2$이다.$(k \in Z)$

(1) $a = 3k+1$인 경우

$a^2 = (3k+1) = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ ∴ 3의 배수가 아니다.

(2) $a = 3k+2$인 경우

$a^2 = (3k+2) = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ ∴ 3의 배수가 아니다.

∴ 대우 명제 $\neg q \to \neg p$ '정수 a가 3의 배수가 아니면, a^2은 3의 배수가 아니다.'는 참(T)이다.

∴ 본 명제 $p \to q$: '정수 a에 대해 a^2이 3의 배수이면 a는 3의 배수이다'는 참(T)이다.

28.

풀이 생략

29.

[대우증명법] $p \to q$: 정수 a, b에 대하여 $(ab)^2$이 4의 배수가 아니면, a, b는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

p : 정수 a, b에 대하여 $(ab)^2$이 4의 배수가 아니다.

$\neg p$: 정수 a, b에 대하여 $(ab)^2$이 4의 배수이다.

q : 정수 a, b는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

$\equiv \{(a\text{는 짝수}) \wedge (b\text{는 짝수})\} \vee \{(a\text{는 홀수}) \wedge (b\text{는 홀수})\}$

$\neg q$: $\neg[\{(a\text{는 짝수}) \wedge (b\text{는 짝수})\} \vee \{(a\text{는 홀수}) \wedge (b\text{는 홀수})\}]$

$\equiv \neg\{(a\text{는 짝수}) \wedge (b\text{는 짝수})\} \wedge \neg\{(a\text{는 홀수}) \wedge (b\text{는 홀수})\}$

$\equiv \{\neg(a\text{는 짝수}) \vee \neg(b\text{는 짝수})\} \wedge \{\neg(a\text{는 홀수}) \vee \neg(b\text{는 홀수})\}$

$\equiv \{(a\text{는 홀수}) \vee (b\text{는 홀수})\} \wedge \{(a\text{는 짝수}) \vee (b\text{는 짝수})\}$

$\equiv \{(a\text{는 홀수}) \wedge (a\text{는 짝수})\} \vee \{(b\text{는 홀수}) \wedge (a\text{는 짝수})\} \vee \{(a\text{는 홀수}) \wedge (b\text{는 짝수})\} \vee \{(b\text{는 홀수})\} \wedge \{(b\text{는 짝수})\}$

$\equiv \mathbb{F} \vee \{(b\text{는 홀수}) \wedge (a\text{는 짝수})\} \vee \{(a\text{는 홀수}) \wedge (b\text{는 짝수})\} \vee \mathbb{F}$

$\because$ 짝수이면서 홀수인 정수는 없다.

$\equiv \{(b\text{는 홀수}) \wedge (a\text{는 짝수})\} \vee \{(a\text{는 홀수}) \wedge (b\text{는 짝수})\}$

$\equiv$ 정수 a, b 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.

$\neg q \to \neg p$: 정수 a, b 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이면, 정수 a, b에 대하여 $(ab)^2$이 4의 배수이다.

정수 a, b 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이므로, $a = 2k(k \in \mathbb{Z})$, $b = 2l+1(l \in \mathbb{Z})$이라고 가정하자.

$$(ab)^2 = \{2k \times (2l+1)\}^2 = \{4kl+2k\}^2 = 16k^2l^2 + 16k^2l + 4k^2 = 4(4k^2l^2 + 4k^2l + k^2)$$

$(ab)^2$의 결과는 4의 배수임을 알 수 있다.

$\therefore$ 대우 명제 $\neg q \to \neg p$ '정수 a, b 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이면, 정수 a, b에 대하여 $(ab)^2$이 4의 배수이다'는 참(T)이다.

$\therefore$ 본 명제 $p \to q$ '정수 a, b에 대하여 $(ab)^2$이 4의 배수가 아니면, a, b는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다'는 참(T)이다.

30.

풀이 생략

31.

[대우증명법] $p \rightarrow q$: 두 자연수의 곱이 400보다 크면, 두 수 중 적어도 하나는 20보다 크다.

p : 두 자연수의 곱이 400보다 크다. $\equiv ab > 400$ $(a, b \in \mathbb{N})$

$\neg p$: 두 자연수의 곱이 400보다 작거나 같다. $\equiv ab \leq 400$

q : 두 수 중 적어도 하나는 20보다 크다. $\equiv (a > 20) \vee (b > 20)$ $(a, b \in \mathbb{N})$

$\neg q$: $\neg\{(a > 20) \vee (b > 20)\} \equiv \neg(a > 20) \wedge \neg(b > 20)$

$\equiv a \leq 20 \wedge b \leq 20$

$\equiv$ 자연수 a, b는 모두 20보다 작거나 같다.

$\neg q \rightarrow \neg p$: 자연수 a, b가 모두 20보다 작거나 같으면, 두 자연수의 곱은 400보다 작거나 같다.

자연수 a, b가 모두 20보다 작거나 같으므로, a, b의 최댓값은 모두 20이다.

그러므로 a와 b의 곱의 최댓값은 400이다.

∴ 대우 명제 $\neg q \rightarrow \neg p$ '자연수 a, b가 모두 20보다 작거나 같으면, 두 자연수의 곱은 400보다 작거나 같다'는 참(T)이다.

∴ 본 명제 $p \rightarrow q$ '두 자연수의 곱이 400보다 크면, 두 수 중 적어도 하나는 20보다 크다'는 참(T)이다.

32.

풀이 생략

33.

풀이 생략

34.

풀이 생략

35.

[반례증명법] $2^a - a$을 소수로 만드는 모든 자연수 a는 소수이다.

$a = 9$인 경우, $2^9 - 9 = 503$으로 자연수 9는 소수가 아니다.

∴ 명제 '$2^a - a$을 소수로 만드는 모든 자연수 a는 소수이다'는 거짓(F)이다.

36.

[존재증명법] $2^a - a$을 소수로 만드는 어떤 자연수 a는 소수이다.

$a = 2$인 경우, $2^2 - 2 = 2$이므로 자연수 2는 소수이다.

∴ 명제 '$2^a - a$을 소수로 만드는 어떤 자연수 a는 소수이다'는 참(T)이다.

37.

풀이 생략

38.
풀이 생략

39.
[반례증명법] $n=20$일 때 $n^2-n+19=(20)^2-20+19=399$로 399는 1 외에도 3, 7, 19, 21, 57, 133과 같은 약수가 존재하므로 소수가 아니다.
∴ 'n이 양의 정수일 때, n^2-n+19는 소수이다'는 거짓(F)이다.

40.
[존재증명법] $n=1$일 때 $n^2-n+19=(1)^2-1+19=19$로 19는 소수이다.
'n^2-n+19는 소수가 되는 양의 정수 n이 적어도 하나는 있다'는 참(T)이다.

41.
풀이 생략

42.
풀이 생략

43.
풀이 생략

44.
$D=\{n \mid n \geq 1, n \in N\}$ $\qquad P(n)$: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

(1) 기본 가정 : $P(1)$: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1)=2 \cdot 1-1=1=1^2$ $\qquad$ ∴ $P(1)$은 성립한다.

(2) 귀납 가정 : $P(k)$: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2$가 성립한다고 가정한다.

(3) 귀납 증명 : $P(k+1)$: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=(k+1)^2$임을 증명한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=(2 \cdot 1-1)+(2 \cdot 2-1)+\ldots+(2 \cdot k-1)+\{2(k+1)-1\}$$
$$=k^2+\{2(k+1)-1\}=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

∴ $P(k+1)$이 성립한다.

∴ $n \geq 1$인 자연수에 대해 $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$이 성립한다.

45.

$D=\{n|n \geq 1, n\in N\}$ $\qquad$ $P(n)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(1) 기본 가정 : $P(1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6}$ $\qquad$ $\therefore$ $P(1)$은 성립한다.

(2) 귀납 가정 : $k\in D$, $k>1$일 때, $P(k)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$가 성립한다고 가정한다.

(3) 귀납 증명 : $P(k+1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ 임을 증명한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$\therefore$ $P(k+1)$이 성립한다.

$\therefore$ $n \geq 1$인 자연수에 대해 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이다.

46.

풀이 생략

47.

풀이 생략

48.

풀이 생략

49.

$D=\{n|n \geq 7, n\in N\}$ $\qquad$ $P(n)$: $3^n < n!$

(1) 기본 가정 : $P(7)$: $3^7 = 2187 < 7! = 5040$ $\qquad$ $\therefore$ $P(7)$은 성립한다.

(2) 귀납 가정 : $k\in D$, $k>7$일 때, $P(k)$: $3^k < k!$가 성립한다고 가정한다.

(3) 귀납 증명 : $P(k+1)$: $3^{k+1} < (k+1)!$: $3 \cdot 3^k < k! \times (k+1)$

$P(k)$의 양변에 3을 곱하면 $3 \cdot 3^k < 3k!$이 성립하는데 이를 이용해 다음을 증명한다.

$$3k! < k! \times (k+1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

①의 양변을 $k!$로 나누면 $3 < k+1$이고 $2 < k$이다.

이때 이 명제의 논의영역은 $k>7$이므로 모든 원소는 2보다 크다.

그러므로 $3k! < k! \times (k+1)$이 성립하고, 그에 따라 $3 \cdot 3^k < k! \times (k+1)$이 성립한다.
$\therefore$ $P(k+1)$이 성립한다.

$\therefore$ $n \geq 7$인 자연수에 대해 $3^n < n!$이 성립한다.

50.
$D = \{n | n \geq 6, n \in N\}$ $P(n)$: $n! > n^3$
(1) 기본 가정 : $P(6)$: $6! = 720 > 6^3 = 216$ $\therefore$ $P(6)$은 성립한다.
(2) 귀납 가정 : $k \in D$, $k > 6$일 때, $P(k)$: $k! > k^3$가 성립한다고 가정한다.
(3) 귀납 증명 : $P(k+1)$: $(k+1)! > (k+1)^3$: $(k+1)! = k! \times (k+1) > (k+1)^3$

$P(k)$의 양변에 $(k+1)$을 곱하면 $k! \times (k+1) > k^3(k+1)$이 성립하는데, 이를 이용해 다음을 증명한다.

$$k^3(k+1) > (k+1)^3 \quad \text{............} \ ①$$

①의 양변을 $(k+1)$로 나누면 $k^3 > (k+1)^2$이다.

$k^3 > (k+1)^2$
$k^3 > k^2 + 2k + 1$
$k^3 - k^2 - 2k - 1 > 0$일 때 논의영역 $k > 6$에 해당하는 최솟값 7을 k에 대입하면
$7^3 - 7^2 - 2 \cdot 7 - 1 = 343 - 49 - 14 - 1 = 279 > 0$

이므로 $k^3(k+1) > (k+1)^3$이 성립한다. 그에 따라 $(k+1)! > (k+1)^3$이 성립한다.
$\therefore$ $P(k+1)$이 성립한다.

$\therefore$ $n \geq 6$인 자연수에 대해 $n! > n^3$이 성립한다.

51.
풀이 생략

52.
풀이 생략

53.
풀이 생략