7장 연습문제 정답

01.

(a)

관계 f_2는 함수가 아니다.

관계 f_4는 함수가 아니다.

관계 f_5는 함수가 아니다.

(b) f_1

원상	상
1	a
2	b
3	a
4	c

$dom(f_1) = A$ $\qquad$ $codom(f_1) = B$ $\qquad$ $ran(f_1) = \{a, b, c\} = B$

f_3

원상	상
w	2
x	1
y	4
z	3

$dom(f_3) = A$ $\qquad$ $codom(f_3) = B$ $\qquad$ $ran(f_3) = \{1, 2, 3, 4\} = B$

f_6

원상	상
1	w
2	x
3	w
4	x

$dom(f_6) = A$ $\qquad$ $codom(f_6) = B$ $\qquad$ $ran(f_6) = \{w, x\}$

02.

(a)

관계f_1 : $dom(f_1) = Z$ $\qquad$ $codom(f_1) = Z$ $\qquad$ $ran(f_1) = Z$

관계 f_3 : $dom(f_3) = \{x | x \geq 2, x \in N\}$ $\qquad$ $codom(f_3) = R$

$$ran(f_3) = \left\{ f_3(x) | f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \in dom(f_3) \right\}$$

관계 f_5 : $dom(f_5) = \{a | a < 0, a \in Z\}$ $\qquad$ $codom(f_5) = N$ $\qquad$ $ran(f_5) = N$

(b)

관계 f_2 : 반례를 들어, $x \in Z$이고 $x = 0$일 때 $f_2(x) = \frac{1}{3} \notin Z$로 집합 Z에 속하는 어떤 원소는 공역 원소 와 대응되지 못한다.

$\therefore$ 관계 f_2는 함수가 아니다.

f_2가 함수가 되기 위해서 $f_2(x) = \frac{x+1}{3} \in Z$가 되도록 정의역을 수정해야 한다. $f_2(x) = \frac{x+1}{3} \in Z$이기 위해서는 $x+1 = 3k$이어야 한다.

$\therefore$ $dom(f_2) = \{x | x = 3k-1, k \in Z\}$ $\qquad codom(f_2) = Z$

$ran(f_2) = \left\{ f_2(x) | f_2(x) = \frac{x+1}{3}, x \in dom(f_2) \right\}$

관계 f_4 : $2x-1 \geq 0$일 경우에 $\sqrt{2x-1}$을 연산할 수 있다. 그러므로 $x < \frac{1}{2}$이면 $2x-1 < 0$이므로 $\sqrt{2x-1}$을 연산할 수 없어서 정의역 원소 $x \in R$에 대한 상을 구할 수 없다.

$\therefore$ 관계 f_4은 함수가 아니다.

관계 f_4이 함수가 되기 위해서는 $\sqrt{2x-1}$을 연산할 수 있도록 정의역 원소의 범위를 $x \geq \frac{1}{2}$로 수정해야 한다.

$\therefore$ $dom(f_4) = \left\{ x | x \geq \frac{1}{2}, x \in R \right\}$ $\qquad codom(f_4) = R$

$ran(f_4) = \{ f_4(x) | f_4(x) = \sqrt{2x-1}, x \in dom(f_4) \}$

관계 f_6 : $f_6 : Z \to N$일 때 $f_6(x) = |x|$

정의역 원소 중 0은 상을 갖지 못한다.

$\therefore$ 관계 f_6는 함수가 아니다.

관계 f_6이 함수가 되기 위해서는 정의역 원소에서 0을 제외시키거나 공역 원소에 0을 추가해야 한다.

$\therefore$ $dom(f_6) = Z - \{0\}$ $\qquad codom(f_6) = N$ $\qquad ran(f_6) = \{ f_6(x) | f_6(x) = |x|, x \in dom(f_6) \}$

or $dom(f_6) = Z$ $\qquad codom(f_6) = N \cup \{0\}$ $\qquad ran(f_6) = \{ f_6(x) | f_6(x) = |x|, x \in dom(f_6) \}$

03.

(a) 함수 f_1 : $1, 2 \in A$에 대해 $1 \neq 2$이고 $f_1(1) = c = c = f_2(2)$ $\qquad \therefore$ 단사함수 ×

$a, b \in B$는 함수 f_1으로 대응되는 집합 A의 원소가 없다. $\therefore$ 전사함수 ×

$\therefore$ 전단사함수 ×

(b) 함수 f_2 : $1, 2 \in A$에 대해 $1 \neq 2$이고 $f_2(1) = a \neq d = f_2(2)$

$1, 3 \in A$에 대해 $1 \neq 3$이고 $f_2(1) = a \neq b = f_2(3)$

$2, 3 \in A$에 대해 $2 \neq 3$이고 $f_2(2) = d \neq b = f_2(3)$ $\qquad \therefore$ 단사함수 ○

$a \in B$는 $f_2(1) = a$로 $1 \in A$와 대응된다.

$b \in B$는 $f_2(3) = b$로 $3 \in A$와 대응된다.

$c \in B$는 함수 f_2로 대응되는 집합 A의 원소가 없다. $\qquad \therefore$ 전사함수 ×

$\therefore$ 전단사함수 ×

(c) 함수 f_3 : 단사함수 ○, 전사함수 ○, 전단사함수 ○

(d) 함수 f_4 : 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

04.

(a) 함수 f_1 : $x_1, x_2 \in Z$에 대해, $x_1 \neq x_2$이면 $f_1(x_1) = \dfrac{3-x_1}{2} \neq \dfrac{3-x_2}{2} = f_1(x_2)$이다.

∴ 단사함수 ○

$y \in R$에 대해 $f_1(x) = \dfrac{3-x}{2} = y$이면 $y = \dfrac{a}{b}(a, b \in Z,\ a, b \neq 0$인 하한항)일 때 x는 다음과 같다.

$$y = \frac{a}{b} = \frac{3-x}{2} \qquad 2a = b(3-x) \qquad x = \frac{3b-2a}{b}$$

$x = \dfrac{3b-2a}{b} \in Z$이려면 $b=1$이거나 $a = bk(k \in Z)$이어야 하지만 이 두 가지 모두의 경우 $\dfrac{a}{b}$가 하한항으로 구성된다는 조건에 위배된다. 그러므로 $y \in R$에 대해 $f_1(x) = \dfrac{3-x}{2} = y$일 때, 항상 $x \in Z$인 것은 아니다.

∴ 전사함수 ×

∴ 전단사함수 ×

(b) 함수 f_2 : $+x, -x \in Z - \{0\}$에 대해, $+x \neq -x$이지만 $f_2(+x) = |+x| = x = |-x| = f_6(-x)$

∴ 단사함수 ×

$x \in N$일 때 $f_2(+x) = f_2(-x) = x$로, $+x, -x \in Z - \{0\}$에 대응된다.

∴ 전사함수 ○

∴ 전단사함수 ×

(c) 함수 f_3 : 단사함수 ○, 전사함수 ○, 전단사함수 ○

(d) 함수 f_4 : 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

05.

(a) 함수 f_1 : 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

함수 f_2 : 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

함수 f_3 : 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_4 : 단사함수 ○, 전사함수 ○, 전단사함수 ○

함수 f_5 : 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(b)

$f_2 \circ f_1 : A \rightarrow C$

$dom(f_2 \circ f_1) = A \qquad codom(f_2 \circ f_1) = C \qquad ran(f_2 \circ f_1) = \{x, y, z\} = C$

$f_3 \circ f_2 : B \to B$

$dom(f_3 \circ f_2) = B$ $codom(f_3 \circ f_2) = B$ $ran(f_3 \circ f_2) = \{a, b, d\}$

$f_5 \circ f_2 : B \to C$

$dom(f_5 \circ f_2) = B$ $codom(f_5 \circ f_2) = C$ $ran(f_5 \circ f_2) = \{y, z\}$

$f_2 \circ f_3 : C \to C$

$dom(f_2 \circ f_3) = C$ $codom(f_2 \circ f_3) = C$ $ran(f_2 \circ f_3) = \{x, z\}$

$f_1 \circ f_4 : A \to B$

$dom(f_1 \circ f_4) = A$ $codom(f_1 \circ f_4) = B$ $ran(f_1 \circ f_4) = \{a, b, c, d\} = B$

$f_3 \circ f_5 : C \to B$

$dom(f_3 \circ f_5) = C,\ codom(f_3 \circ f_5) = B,\ ran(f_3 \circ f_5) = \{a, b\}$

(c)

$f_2 \circ f_1$: 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_2$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_5 \circ f_2$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_2 \circ f_3$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_1 \circ f_4$: 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_5$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(d)

풀이 생략

(e)

풀이 생략

06.

(a)

함수 f_1 :

임의의 $x_1, x_2 \in N$에 대해 $x_1 \neq x_2$일 때 $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$이고 $f_1(x_1), f_1(x_2) \leq -4$이므로

$f_1(x_1), f_1(x_2) \in Z - \{0\}$

∴ 단사함수 ○

$y \in Z - \{0\}$이고 $y \leq -4$이면 $f_1(x) = y$를 만족하는 $x \in N$이 존재하지만 $y > -4$이면 $f_1(x) = y$를 만족하는 $x \in N$이 존재하지 않는다.

∴ 전사함수 ×

∴ 전단사함수 ×

함수 f_2 :

반례로, $x_1 = 0.3$과 $x_2 = 0.843$의 경우 $x_1, x_2 \in R$이고 $x_1 \neq x_2$이지만

$$f_2(x_1) = f_2(0.3) = \lceil 0.3 - 1 \rceil = \lceil -0.7 \rceil = 0$$
$$f_2(x_2) = f_2(0.843) = \lceil 0.843 - 1 \rceil = \lceil -0.157 \rceil = 0$$

이므로 $f_2(x_1) = f_2(x_2)$이다.

$\therefore$ 단사함수 ×

$y \in Z$인 경우 $f_7(x) = y$를 만족하는 x는 $y - 1 < x \leq y$인 $x \in R$이 존재한다.

$\therefore$ 전사함수 ○

$\therefore$ 전단사함수 ×

함수 f_3 :

임의의 $x_1, x_2 \in R$에 대해 $x_1 \neq x_2$이면 사칙연산에 대해 닫혀있으므로 $f_3(x_1) \neq f_3(x_2)$이고 $f_3(x_1), f_3(x_2) \in R$

$\therefore$ 단사함수 ○

모든 $y \in R$에 대해 $f_3(x) = y$를 만족하는 $x \in R$이 존재한다.

$\therefore$ 전사함수 ○

$\therefore$ 전단사함수 ○

함수 f_4 :

$+x, -x \in Z - \{0\}$이고 $+x \neq -x$이지만 $f_4(+x) = |+x| = x = |-x| = f_4(-x)$

$\therefore$ 단사함수 ×

모든 $y \in N$에 대해 $f_4(x) = y$를 만족하는 $+y, -y \in Z - \{0\}$이 존재한다.

$\therefore$ 전사함수 ○

$\therefore$ 전단사함수 ×

함수 f_5 :

임의의 $x_1, x_2 \in Z$에 대해 $x_1 \neq x_2$이면 $f_5(x_1) \neq f_5(x_2)$이고 $f_5(x_1), f_5(x_2) \in Z$

$\therefore$ 단사함수 ○

모든 $y \in Z$에 대해 $f_5(x) = y$를 만족하는 $x \in Z$가 존재한다.

$\therefore$ 전사함수 ○

$\therefore$ 전단사함수 ○

(b)

$f_4 \circ f_1 : N \to N$

$dom(f_4 \circ f_1) = N$ $\qquad$ $codom(f_4 \circ f_1) = N$

$ran(f_4 \circ f_1) = \{f_4(f_1(x)) | f_4(f_1(x)) = |-(3+x)|, x \in N\}$

$f_5 \circ f_2 : R \to Z$

$dom(f_5 \circ f_2) = R$ $codom(f_5 \circ f_2) = Z$

$ran(f_5 \circ f_2) = \{f_5(f_2(x)) | f_5(f_2(x)) = \lceil x-1 \rceil, x \in R\}$

$f_2 \circ f_3 : R \to Z$

$dom(f_2 \circ f_3) = R$ $codom(f_2 \circ f_3) = Z$

$ran(f_2 \circ f_3) = \left\{f_2(f_3(x)) | f_2(f_3(x)) = \left\lceil x^2 - \frac{3x}{4} - 1 \right\rceil \ x \in R\right\}$

$f_1 \circ f_4 : Z - \{0\} \to Z - \{0\}$

$dom(f_1 \circ f_4) = Z - \{0\}$ $codom(f_1 \circ f_4) = Z - \{0\}$

$ran(f_1 \circ f_4) = \{f_1(f_4(x)) | f_1(f_4(x)) = -(3 + |x|), x \in Z - \{0\}\}$

(c)

$f_4 \circ f_1$: 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_5 \circ f_2$: 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

$f_2 \circ f_3$: 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

$f_1 \circ f_4$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(d)

$f_4 \circ f_1$: [정리 7-2]를 이용한 판별을 할 수 없다.

$f_5 \circ f_2$: [정리 7-2]의 (b)를 이용한 판별 : 함수 f_5는 전단사함수(단사함수이면서 전사함수),
함수 f_2는 전사함수

∴ 합성함수 $f_5 \circ f_2$은 전사함수

$f_2 \circ f_3$: [정리 7-2]의 (2)를 이용한 판별 : 함수 f_2는 전사함수,
함수 f_3는 전단사함수(단사함수이면서 전사함수)

∴ 합성함수 $f_2 \circ f_3$은 전사함수

$f_1 \circ f_4$: [정리 7-2]를 이용한 판별을 할 수 없다.

(e)

풀이 생략

07.

(a)

$dom(f_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$codom(f_1) = \{a, b, c\}$	$ran(f_1) = \{a, b, c\}$
$dom(f_2) = \{a, b, c\}$	$codom(f_2) = \{1, 2, 3\}$	$ran(f_2) = \{3\}$
$dom(f_3) = \{a, b, c, d\}$	$codom(f_3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$ran(f_3) = \{1, 2, 4, 5\}$
$dom(f_4) = \{1, 2, 3\}$	$codom(f_4) = \{a, b, c, d\}$	$ran(f_4) = \{a, c\}$
$dom(f_5) = \{1, 2, 3, 4\}$	$codom(f_5) = \{a, b, c, d\}$	$ran(f_5) = \{a, b, c, d\}$
$dom(f_6) = \{1, 2, 3, 4\}$	$codom(f_6) = \{a, b, c\}$	$ran(f_6) = \{a, b, c\}$

(b)

함수 f_1 : 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

함수 f_2 : 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_3 : 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_4 : 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_5 : 단사함수 ○, 전사함수 ○, 전단사함수 ○

함수 f_6 : 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(c)

$f_2 \circ f_1$

$dom(f_2 \circ f_1) = \{1,2,3,4,5\}$ $codom(f_2 \circ f_1) = \{1,2,3\}$ $ran(f_2 \circ f_1) = \{3\}$

$f_4 \circ f_2$

$dom(f_4 \circ f_2) = \{a,b,c\}$ $codom(f_4 \circ f_2) = \{a,b,c,d\}$ $ran(f_4 \circ f_2) = \{a\}$

$f_1 \circ f_3$

$dom(f_1 \circ f_3) = \{a,b,c,d\}$ $codom(f_1 \circ f_3) = \{a,b,c\}$ $ran(f_1 \circ f_3) = \{a,b,c\}$

$f_3 \circ f_4$

$dom(f_3 \circ f_4) = \{1,2,3\}$ $codom(f_3 \circ f_4) = \{1,2,3,4,5\}$ $ran(f_3 \circ f_4) = \{1,4\}$

$f_3 \circ f_5$

$dom(f_3 \circ f_5) = \{1,2,3,4\}$ $codom(f_3 \circ f_5) = \{1,2,3,4,5\}$ $ran(f_3 \circ f_5) = \{1,2,4,5\}$

$f_2 \circ f_6$

$dom(f_2 \circ f_6) = \{1,2,3,4\}$ $codom(f_2 \circ f_6) = \{1,2,3\}$ $ran(f_2 \circ f_6) = \{3\}$

(d)

$f_2 \circ f_1$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_4 \circ f_2$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_1 \circ f_3$: 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_4$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_5$: 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_2 \circ f_6$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(e)

가역함수 f_5

$\therefore\ f_5^{-1} = \{(a,3),(b,1),(c,2),(d,4)\}$

$dom(f_5^{-1}) = \{a,b,c,d\}$, $codom(f_5^{-1}) = \{1,2,3,4\}$, $ran(f_5^{-1}) = \{1,2,3,4\}$

(f)

$f_5^{-1} \circ f_5 = I_{\{1,2,3,4\}}$, $f_5 \circ f_5^{-1} = I_{\{a,b,c,d\}}$

08.

(a)

함수 f_1 :

정의역 원소 $x_1, x_2 \in N$에 대해 $x_1 \neq x_2$일 때 $f_1(x_1) = x_1 + 3 \neq x_2 + 3 = f_1(x_2)$

∴ 단사함수 ○

공역 원소 중 $y < 4, y \in N$은 $f_1(x) = y$를 만족하는 $x \in N$이 존재하지 않는다.

∴ 전사함수 ×

∴ 전단사함수 ×

함수 f_2 :

모든 정의역 원소 $x_1, x_2 \in R$에 대해 $x_1 \neq x_2$어도 $f_2(x_1) = 3 = f_2(x_2)$

∴ 단사함수 ×

$3 \in Z$를 제외한 나머지 공역 원소는 $f_2(x) = y$를 만족하는 정의역 원소 $x \in R$을 갖지 않는다.

∴ 전사함수 ×

∴ 전단사함수 ×

함수 f_3 :

정의역 원소 $x_1, x_2 \in Z$에 대해 $x_1 \neq x_2$일 때 $f_3(x_1) = \frac{x_1}{4} \neq \frac{x_2}{4} = f_3(x_2)$

∴ 단사함수 ○

공역 원소 $y \in R$ 중 $y \neq \frac{k}{4}, (k \in Z)$인 경우 $f_3(x) = y$를 만족하는 $x \in Z$가 존재하지 않는다.

∴ 전사함수 ×

∴ 전단사함수 ×

함수 f_4 :

[반례] 정의역 원소 중 $x_1 = 0, x_2 = -2$에 대해 $0 \neq -2$이어도

$f_4(0) = |0+1| = 1 = |-2+1| = f_4(-2)$

∴ 단사함수 ×

모든 공역 원소 $y \in N \cup \{0\}$에 대해 $f_4(x) = y$를 만족하는 $x \in Z$가 존재한다.

∴ 전사함수 ○

∴ 전단사함수 ×

함수 f_5 :

정의역 원소 $x_1, x_2 \in R - \{0\}$에 대해 $x_1 \neq x_2$일 때 $f_5(x_1) = \frac{2x_1 + 1}{x_1} \neq \frac{2x_2 + 1}{x_2} = f_5(x_2)$

∴ 단사함수 ○

모든 공역 원소 $y \in R$에 대해 $f_5(x) = y$를 만족하는 $x \in R - \{0\}$이 존재한다.

∴ 전사함수 ○

∴ 전단사함수 ○

(b)

$f_1 \circ f_1$:

$dom(f_1 \circ f_1) = N$, $codom(f_1 \circ f_1) = N$

$ran(f_1 \circ f_1) = \{f_1(f_1(x)) | f_1(f_1(x)) \geq 7, f_1(f_1(x)) \in N$

$f_3 \circ f_2$:

$dom(f_3 \circ f_2) = R$, $codom(f_3 \circ f_2) = R$, $ran(f_3 \circ f_2) = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

$f_4 \circ f_2$:

$dom(f_4 \circ f_2) = R$, $codom(f_4 \circ f_2) = N \cup \{0\}$, $ran(f_4 \circ f_2) = \{4\}$

$f_2 \circ f_3$:

$dom(f_2 \circ f_3) = Z$, $codom(f_2 \circ f_3) = Z$, $ran(f_2 \circ f_3) = \{3\}$

$f_2 \circ f_5$:

$dom(f_2 \circ f_5) = R - \{0\}$, $codom(f_2 \circ f_5) = Z$, $ran(f_2 \circ f_5) = \{3\}$

(c)

$f_1 \circ f_1$: 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_2$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_4 \circ f_2$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_2 \circ f_3$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_2 \circ f_5$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(d)

$f_5^{-1}(x) : R \rightarrow R - \{0\}$, $f_5^{-1}(x) = \frac{1}{x-2}$

$dom(f_5^{-1}) = R$, $codom(f_5^{-1}) = R - \{0\}$, $ran(f_5^{-1}) = \left\{f_5^{-1}(x) | f_5^{-1} = \frac{1}{x-2}, x \in R, x \neq 2\right\}$

(e)

$f_5 \circ f_5^{-1} = I_R$, $f_5^{-1} \circ f_5 = I_{R-\{0\}}$

(f)

상수함수 : f_2

특성함수 : 없다.

09.

(a)

함수 f_1 : 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_2 : 단사함수 ○, 전사함수 ○, 전단사함수 ○

함수 f_3 : 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_4 : 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

함수 f_5 : 단사함수 ×, 전사함수 ○, 전단사함수 ×

(b)d

$f_2 \circ f_1$:

$dom(f_2 \circ f_1) = Z,\ codom(f_2 \circ f_1) = R,$

$ran(f_2 \circ f_1) = \left\{ f_2(f_1(x)) | f_2(f_1(x)) = \frac{2x}{5} + 3, x \in Z \right\}\}$

$f_2 \circ f_2$:

$dom(f_2 \circ f_2) = R,\ codom(f_2 \circ f_2) = R,\ ran(f_2 \circ f_2) = R$

$f_1 \circ f_3$:

$dom(f_1 \circ f_3) = Z,\ codom(f_1 \circ f_3) = R$

$ran(f_1 \circ f_3) = \left\{ f_1(f_3(x)) | f_1(f_3(x)) = \frac{2(|x|+2)}{3} + 3, x \in Z \right\}\}$

$f_3 \circ f_3$:

$dom(f_3 \circ f_3) = Z,\ codom(f_3 \circ f_3) = Z,$

$ran(f_3 \circ f_3) = \{ f_3(f_3(x)) | f_3(f_3(x)) \geq 4, f_3(f_3(x)) \in N \}\}$

$f_1 \circ f_4$:

$dom(f_1 \circ f_4) = N,\ codom(f_1 \circ f_4) = R$

$ran(f_1 \circ f_4) = \left\{ f_1(f_4(x)) | f_1(f_4(x)) = \frac{2(3x-1)}{5} + 3, x \in N \right\}\}$

$f_3 \circ f_4$:

$dom(f_3 \circ f_4) = N,\ codom(f_3 \circ f_4) = Z,\ ran(f_3 \circ f_4) = \{ f_3(f_4(x)) | f_3(f_4(x)) \geq 4, x \in N \}\}$

(c)

$f_2 \circ f_1$: 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_2 \circ f_2$: 단사함수 ○, 전사함수 ○, 전단사함수

$f_1 \circ f_3$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_3$: 단사함수 ×, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_1 \circ f_4$: 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

$f_3 \circ f_4$: 단사함수 ○, 전사함수 ×, 전단사함수 ×

(d)

$f_2^{-1} : R \rightarrow R,\ f_2^{-1}(x) = x$

$dom(f_2^{-1}) = R = codom(f_2^{-1}) = ran(f_2^{-1})$

(e)

$f_2 \circ f_2^{-1} = I_R$

$f_2^{-1} \circ f_2 = I_R$

(f)

상수함수 : 없음

특성함수 : 함수 f_5

10.

(a)

함수 f_1, 함수 f_2

(b)

$f_1^{-1} \circ f_1$: A에 대한 항등함수

$f_1 \circ f_1^{-1}$: B에 대한 항등함수

$f_2^{-1} \circ f_2$: N_{dom}에 대한 항등함수

$f_2 \circ f_2^{-1}$: N_{codom}에 대한 항등함수

(c)

함수 f_5 : 모든 정의역 원소 $x \in Z-\{0\}$이 공역 원소 $1 \in \{0,1\}$과 대응하므로 $f_5(x) = 1$이 성립한다.

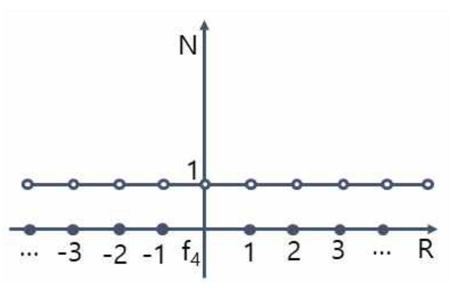
$\therefore$ 함수 f_5는 상수함수이다.

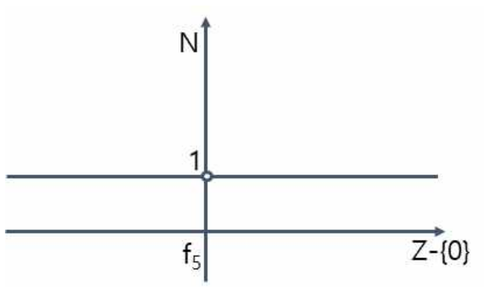
함수 f_4 : 정의역 원소 $x \in R$일 때 $1 \in N \cup \{0\}$이고, $x \in R$이면서 $x \in Z$가 될 때는 $0 \in N \cup \{0\}$이므로

함수 f_4의 모든 원소는 $\{0,1\} \in N-\{0\}$과 대응한다.

함수 f_5 : 입력값이 어떤 특성에 만족하는지 아닌지를 판단하여 출력을 내는 함수이다.

$\therefore$ 함수 f_4, f_5는 특성함수이다.





11.

(a) $f: R \to R,\ f(x) = 7$

(b) $f: R \to Z(\text{or } R),\ f(x) = 2\lfloor x \rfloor$

(c) $f: R \to R,\ f(x) = -\dfrac{1}{3}\lceil x \rceil$

(d) $f: Z \to Z\,(\text{or } \{0, 1\}),\ f(x) = \begin{cases} 0 & x = 4k+1, k \in Z \\ 1 & x \neq 4k+1, k \in Z \end{cases}$

(e) $f: Z \to Z\,(\text{or } \{0, 1\}),\ f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 2k, k \in Z \\ 1 & x = 2k, k \in Z \end{cases}$

12.

(a) $\lceil 2.1 \rceil + \lceil 7 \rceil = 10$

(b) $\lfloor 2.1 \rfloor + \lfloor 7 \rfloor = 9$

(c) $\lceil 3.5 + \lceil 8.9 \rceil - \lfloor 2.3 \rfloor \rceil = 11$

(d) $\lfloor 3.5 + \lfloor 8.9 \rfloor - \lceil 2.3 \rceil \rfloor = 8$

(e) $\lceil 6 \rceil - \lfloor 2 \rfloor = 4$

(f) $\lfloor 6 \rfloor - \lceil 2 \rceil = 4$

13.

(a) $\lfloor -3.586 \rfloor \times \lfloor 7.88 \rfloor = (-4) \times 7 = -28$

(b) $\lfloor \lceil 4.23 \rceil \times -3.31 \rfloor = \lfloor 5 \times -3.31 \rfloor = \lfloor -16.55 \rfloor = -17$

(c) $\lceil 4 \rceil - \lfloor 3.56 + \lceil -7.2291 \rceil \rfloor = \lceil 4 \rceil - \lfloor 3.56 + (-7) \rfloor$
$= \lceil 4 \rceil - \lfloor -3.44 \rfloor = \lceil 4 \rceil - (-4) = 4 - (-4) = 8$

(d) $\lceil -8 \rceil + \lceil -3.112 \rceil - \lceil 5.61 \rceil = (-8) + (-3) - 6 = -17$

(e) $\lfloor 5 \rfloor - \lfloor -6.893 \rfloor + \lfloor -3.33 \rfloor = 5 - (-7) + (-4) = 8$

(f) $\left\lceil \dfrac{1}{3} - \left\lceil \dfrac{1}{4} + \left\lfloor \dfrac{1}{2} \right\rfloor \right\rceil \right\rceil = \lceil 0.333 - \lceil 0.25 + \lfloor 0.5 \rfloor \rceil \rceil$
$= \lceil 0.333 - \lceil 0.25 + 0 \rceil \rceil = \lceil 0.333 - 1 \rceil = \lceil -0.667 \rceil = 0$

14.

(a) $\left\lfloor \dfrac{2}{5} - \left\lceil \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{7} \right\rceil + \left\lfloor \dfrac{4}{6} \right\rfloor + \dfrac{1}{5} \right\rfloor = -1$

(b) $\left\lceil \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5}\right) \times \left\lfloor -\dfrac{3}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{6}{7} \right\rfloor \right\rceil = 1$

(c) $\lceil 9.667 \rceil + \lfloor 3.75 - \lceil 7.543 + \lceil 4.33 \rceil \rceil \rfloor = 0$

(d) $\lfloor 9.667 \rfloor + \lceil 3.75 - \lfloor 7.543 + \lfloor 4.33 \rfloor \rfloor \rceil = 2$

(e) $\lceil 8.53 + \lfloor 4.56 + 7.399 - \lfloor 5.46 + \lceil 4 \rceil \rfloor \rfloor \rceil = 11$

(f) $\lfloor 8.53 + \lceil 4.56 + 7.399 - \lceil 5.46 + \lfloor 4 \rfloor \rceil \rceil \rfloor = 10$