11장 연습문제 정답

01.

학생회장 자격이 있는 학생들 : 2학년 22명, 3학년 28명, 4학년 18명

$\therefore\ 22 + 28 + 18 = 68$

02.

1050가지

03.

각 회전 당 우승팀

1회전	2회전	3회전	4회전	5회전	6회전	7회전
A	A	A	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
		B	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
	B	A	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
		B	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B

1회전	2회전	3회전	4회전	5회전	6회전	7회전
B	A	A	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
		B	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
	B	A	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
		B	A	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B
			B	A	A	A
						B
					B	A
						B
				B	A	A
						B
					B	A
						B

$\therefore\ 3\times(2\times2\times2\times2)=3\times16=48$가지

04.

962가지

05.

${}_{8}P_{1}=8$가지

06.

240가지

07.

(a) 2가 천의 자리에 오면 나머지 숫자들이 백의 자리부터 일의 자리까지 나열되므로 남은 6개의 숫자 중 3개를 선택하여 나열하는 경우이다.

$$\therefore\ {}_{6}P_{3}=\frac{6!}{(6-3)!}=120\text{가지}$$

(b) 짝수가 되려면 마지막 자리가 0, 2, 4, 6 중 하나여야 한다.

1) ***0 : *의 자리에 1부터 6까지 6개의 숫자 중 3개를 선택 : ${}_{6}P_{3}$

2) #**2 / #**4 / #**6

: #의 자리에 0과 2 / 4 / 6을 제외한 5개의 숫자 중 하나를 선택 : ${}_{5}P_{1}$

: *의 자리에 #과 2 / 4 / 6을 제외한 5개의 숫자 중 2개를 선택 : ${}_{5}P_{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &{}_{6}P_{3}+({}_{5}P_{1}\times{}_{5}P_{2})+({}_{5}P_{1}\times{}_{5}P_{2})+({}_{5}P_{1}\times{}_{5}P_{2})\\&=\frac{6!}{(6-3)!}+\left\{\frac{5!}{(5-1)!}\times\frac{5!}{(5-2)!}\right\}+\left\{\frac{5!}{(5-1)!}\times\frac{5!}{(5-2)!}\right\}+\left\{\frac{5!}{(5-1)!}\times\frac{5!}{(5-2)!}\right\}\\&=120+100+100+100=420\text{가지}\end{aligned}$$

(c) #61* 형태

1) #의 자리 : 0, 1, 6을 제외한 4개의 숫자 중 하나 선택 : ${}_{4}P_{1}$

2) *의 자리 : #, 1, 6을 제외한 4개의 숫자 중 하나 선택 : ${}_{4}P_{1}$

$$\therefore\ {}_{4}P_{1}\times{}_{4}P_{1}=\frac{4!}{(4-1)!}\times\frac{4!}{(4-1)!}=4\times4=16\text{가지}$$

08.

(a) 343가지

(b) 1176가지

(c) 42가지

09.

${}_{7}\Pi_{5}=7^{5}=16807$가지

10.

243가지

11.

$\frac{14!}{2!\times 5!\times 7!}=72072$가지

12.

20가지

13.

(a) 첫 자리에 올 수 있는 숫자들 : 1(3개), 2(1개), 3(2개)

1) 첫 자리가 1일 때 : 1 ○○○○○○

① 0(2개)*1(2개)*3(2개) : ${}_2C_2\times {}_2C_2\times {}_2C_2\times \frac{6!}{2!2!2!}$

② 0(2개)*1(2개)*2(1개)*3(1개) : ${}_2C_2\times {}_2C_2\times {}_1C_1\times {}_2C_1\times \frac{6!}{2!2!}$

③ 0(2개)*1(1개)*2(1개)*3(2개) : ${}_2C_2\times {}_2C_1\times {}_1C_1\times {}_2C_2\times \frac{6!}{2!2!}$

④ 0(1개)*1(2개)*2(1개)*3(2개) : ${}_2C_1\times {}_2C_2\times {}_1C_1\times {}_2C_2\times \frac{6!}{2!2!}$

∴ 첫 자리가 1인 숫자 : $\frac{6!}{2!2!2!}+2\times\frac{6!}{2!2!}+2\times\frac{6!}{2!2!}+2\times\frac{6!}{2!2!}=1170$가지

2) 첫 자리가 2일 때 : 2 ○○○○○○

0(2개)*1(2개)*3(2개) : ${}_2C_2\times {}_3C_2\times {}_2C_2\times \frac{6!}{2!2!2!}$

∴ 첫 자리가 2인 숫자 : $3\times\frac{6!}{2!2!2!}=270$가지

3) 첫 자리가 3일 때 : 3 ○○○○○○

① 0(2개)*1(3개)*2(1개) : ${}_2C_2\times {}_3C_3\times {}_1C_1\times \frac{6!}{2!3!}$

② 0(2개)*1(3개)*3(1개) : ${}_2C_2\times {}_3C_3\times {}_1C_1\times \frac{6!}{2!3!}$

③ 0(2개)*1(2개)*2(1개)*3(1개) : ${}_2C_2\times {}_3C_2\times {}_1C_1\times {}_1C_1\times \frac{6!}{2!2!}$

④ 0(1개)*1(3개)*2(1개)*3(1개) : ${}_2C_1\times {}_3C_3\times {}_1C_1\times {}_1C_1\times \frac{6!}{3!}$

∴ 첫자리가 3인 숫자 : $\frac{6!}{2!3!}+\frac{6!}{2!3!}+3\times\frac{6!}{2!2!}+2\times\frac{6!}{3!}=900$가지

∴ 7자리의 숫자 : 1170 + 270 + 900 = 2340가지

(b) 일의 자리가 2인 경우 : (첫 자리가 1 또는 3)○○○○○2의 형태

1) 첫 자리가 1일 때 : 1 ○○○○○ 2

① 0(2개)*1(2개)*3(1개) : ${}_2C_2\times {}_2C_2\times {}_1C_1\times \frac{6!}{2!2!}$

② 0(2개)*1(1개)*3(2개) : ${}_2C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_2 \times \dfrac{6!}{2!2!}$

③ 0(1개)*1(2개)*3(2개) : ${}_2C_1 \times {}_2C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{6!}{2!2!}$

∴ 첫 자리가 1일 때 일의 자리가 2인 숫자 : $\dfrac{6!}{2!2!} + 2 \times \dfrac{6!}{2!2!} + 2 \times \dfrac{6!}{2!2!} = 900$가지

2) 첫 자리가 3일 때 ; 3 ○○○○○ 2

① 0(2개)*1(3개) : ${}_2C_2 \times {}_3C_3 \times \dfrac{6!}{2!3!}$

② 0(2개)*1(2개)*3(1개) : ${}_2C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \dfrac{6!}{2!2!}$

③ 0(1개)*1(3개)*3(1개) : ${}_2C_1 \times {}_3C_3 \times {}_1C_1 \times \dfrac{6!}{3!}$

∴ 첫 자리가 3일 때 일의 자리가 2인 숫자 : $\dfrac{6!}{2!3!} + 3 \times \dfrac{6!}{2!2!} + 2 \times \dfrac{6!}{2!2!} = 960$가지

∴ 일의 자리가 2인 숫자 : 900 + 960 = 1860가지

14.
181,440가지

15.
c 1개, l 2개, n 1개, o 3개, p 2개, r 2개, y 1개

① 같은 문자 3개, 다른 문자 1개 : 예) ooo*

- 조합 : o를 제외한 나머지 6개의 문자 중 한 개 선택 : ${}_6C_1 = \dfrac{6!}{1!(6-1)!} = 6$ 가지
- 순열 : (o를 제외한 나머지 6개의 문자 중 한 개 선택) × (세 개의 o 나열)

  : ${}_6C_1 \times \dfrac{4!}{3!} = \dfrac{6!}{1!(6-1)!} \times \dfrac{4!}{3!} = 24$가지

② 같은 문자 2개, 같은 문자 2개 : 예) ooll

- 조합 : 2개 이상인 문자 l, o, p, r 중 2개 선택 : ${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ 가지
- 순열 : (2개 이상인 문자 l, o, p, r 중 2개 선택) × (선택된 문자 나열)

  : ${}_4C_2 \times \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} \times \dfrac{4!}{2!2!} = 36$가지

③ 같은 문자 2개 서로 다른 문자 2개 : 예) oo*#

- 조합 : l, o, p, r 중 한 문자를 2개 선택하면 남은 여섯 종류의 문자들 중 서로 다른 2개를 선택

  예) l을 2개 선택했을 때, c, n, o, p, r, y 중 2개 선택

  : ${}_6C_2 \times 4 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} \times 4 = 60$가지
- 순열 : (l, o, p, r 중 한 문자를 2개 선택하면 남은 여섯 종류의 문자들 중 서로 다른 2개를 선택)

  × (같은 문자 나열)

: $_6C_2 \times 4 \times \frac{4!}{2!} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \times 4 \times \frac{4!}{2!} = 720$

④ 서로 다른 문자 4개 : 예) roly

- 조합 : 일곱 종류의 문자들(c, l, n, o, p, r, y) 중 4개 선택 : $_7C_4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ 가지
- 순열 : 일곱 종류의 문자들(c, l, n, o, p, r, y) 중 4개 선택 : $_7C_4 \times 4! = \frac{7!}{4!(7-4)!} \times 4! = 840$가지

∴ 조합 : 6 + 6 + 60 + 35 = 107가지 / 순열 : 24 + 36 + 720 + 840 = 1620가지

16.

48개

17.

세 개의 수 중, 하나라도 짝수이면 세 수의 곱이 짝수이므로 전체 조합에서 홀수만의 조합을 뺀다.

전체 조합의 수 : $_{15}C_3$

홀수만의 조합의 수 : $_8C_3$

$$\therefore\ _{15}C_3 - {}_8C_3 = \frac{15!}{3!\,12!} - \frac{8!}{3!\,5!} = 455 - 56 = 399\text{가지}$$

18.

(a) 9,800가지

(b) 6,564가지

19.

150명에서 5명을 뽑는 조합을 원소로 하는 집합을 V이고 업무의 수를 m이라고 하면, V의 각 원소는 한 업무의 원소

$$n(V) = {}_{150}C_5 = \frac{150!}{5!\,145!}\text{가지}$$

각 업무는 25명의 직원이 있으므로 이들 중에 V의 원소가 $_{25}C_5$쌍이 있다.

$$\therefore\ _{150}C_5 = {}_{25}C_5 \times m$$

$$\frac{150!}{5!\,145!} = \frac{25!}{5!\,20!} \times m$$

$$\therefore\ m = \frac{150!}{5!\,145!} \times \frac{5!\,20!}{25!} = \frac{150!5!20!}{5!145!25!} \fallingdotseq 11134.95257\text{개}$$

20.

(a) $4,655,851,200$가지

(b) $12,730,843,125$가지

(c) $203,693,490,000$가지

21.

(a) 14,348,907가지

(b) 136가지

22.

(a) $(x+y)^4 = {}_4C_0x^4y^0 + {}_4C_1x^3y^1 + {}_4C_2x^2y^2 + {}_4C_4x^1y^3 + {}_4C_4x^0y^4$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

(b) $(3a-2b)^5 = {}_5C_0(3a)^5(-2b)^0 + {}_5C_1(3a)^4(-2b)^1 + {}_5C_2(3a)^3(-2b)^2 + {}_5C_3(3a)^2(-2b)^3 +$

${}_5C_4(3a)^1(-2b)^4 + {}_5C_5(3a)^0(-2b)^5$

$= 243a^5 - 810a^4b + 1080a^3b^2 - 720a^2b^3 + 240ab^4 - 32b^5$

(c) $(-x+y)^8 = {}_8C_0(-x)^8y^0 + {}_8C_1(-x)^7y^1 + {}_8C_2(-x)^6y^2 + {}_8C_3(-x)^5y^3 + {}_8C_4(-x)^4y^4 +$

${}_8C_5(-x)^3y^5 + {}_8C_6(-x)^2y^6 + {}_8C_7(-x)^1y^7 + {}_8C_8(-x)^0y^8$

$= x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 26x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$

(d) $(-2x-5y)^{11} = {}_{11}C_0(-2x)^{11}(-5y)^0 + {}_{11}C_1(-2x)^{10}(-5y)^1 + {}_{11}C_2(-2x)^9(-5y)^2 +$

${}_{11}C_3(-2x)^8(-5y)^3 + {}_{11}C_4(-2x)^7(-5y)^4 + {}_{11}C_5(-2x)^6(-5y)^5 +$

${}_{11}C_6(-2x)^5(-5y)^6 + {}_{11}C_7(-2x)^4(-5y)^7 + {}_{11}C_8(-2x)^3(-5y)^8 +$

${}_{11}C_9(-2x)^2(-5y)^9 + {}_{11}C_{10}(-2x)^{10}(-5y)^1 + {}_{11}C_{11}(-2x)^0(-5y)^{11}$

(e) $(3a+2b)^{15} = {}_{15}C_0(3a)^{15}(2b)^0 + {}_{15}C_1(3a)^{14}(2b)^1 + {}_{15}C_2(3a)^{13}(2b)^2 + {}_{15}C_3(3a)^{12}(2b)^3 +$

$\cdots {}_{15}C_{12}(3a)^3(2b)^{12} + {}_{15}C_{13}(3a)^2(2b)^{13} + {}_{15}C_{14}(3a)^1(2b)^{14} + {}_{15}C_{15}(3a)^0(2b)^{15}$

(f) $(-4x-5y)^{15}$

$= {}_{15}C_0(-4a)^{15}(-5b)^0 + {}_{15}C_1(-4a)^{14}(-5b)^1 + {}_{15}C_2(-4a)^{13}(-5b)^2 + {}_{15}C_3(-4a)^{12}(-5b)^3 +$

$\ldots + {}_{15}C_{12}(-4a)^3(-5b)^{12} + {}_{15}C_{13}(-4a)^2(-5b)^{13} + {}_{15}C_{14}(-4a)^1(-5b)^{14} + {}_{15}C_{15}(-4a)^0(-5b)^{15}$

23.

(a) 15360

(b) 3840

(c) 273000000000000

(d) -5271552000000000

24.

세 카드의 값을 더한 결과가 짝수인 경우 : $\frac{1}{2}$

세 카드의 값을 더한 결과가 홀수인 경우 : $\frac{1}{2}$

25.

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수 : 5!

(a) ‘다’를 제외한 나머지 배열의 경우의 수를 이용 : 4!

$$\therefore \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

(b) ‘가’와 ‘라’를 하나의 묶음으로 보았을 때 배열의 수 : 3!

‘라’와 ‘가’ 사이의 배열의 수 : 2!

$$\therefore \frac{3!\ 2!}{5!} = \frac{1}{10}$$

(c) ① ‘나’와 ‘마’ 사이에 한 문자가 들어가는 경우 ‘나’○'마‘ : $2! \times 3$

①을 하나의 묶음으로 봤을 때의 배열 : 3!

$$\therefore 2! \times 3 \times 3! = 36\text{가지}$$

② ‘나’와 ‘마’ 사이에 두 문자가 들어가는 경우, ‘나’○△‘마’ : $2! \times {}_3P_2$

②를 하나의 묶음으로 봤을 때의 배열 : 2!

$$\therefore 2! \times 2! \times {}_3P_2 = 4 \times 6 = 24\text{가지}$$

③ ‘나’와 ‘마’ 사이에 세 문자가 들어가는 경우, ‘나’○△□‘마’ : 2!

$$\therefore (2! \times 3 \times 3!) + (2! \times {}_3P_2 \times 2!) + 2!$$

$$= 24 + 24 + 2 = 50\text{가지}$$

$$\therefore \frac{50}{5!} = \frac{5}{72}$$

26.

(a) $\frac{1}{5}$

(b) $\frac{11}{30}$

27.

11개의 문자를 나열 $\frac{11!}{2! \times 2!}$

b_1, b_2가 이웃하는 동시에 i_1, i_2가 이웃하는 경우 : 9!

같은 문자가 이웃할 확률 : $\dfrac{9!}{\dfrac{11!}{2! \times 2!}}$

∴ 같은 문자가 이웃하지 않을 확률 : $1 - \dfrac{9!}{\dfrac{11!}{2! \times 2!}}$

28.

(a) 10개 중 하나를 뽑았을 때 별 그림이 선택될 확률 : $\frac{1}{5}$

(b) 6개와 4개 두 묶음으로 나누어 한 개를 뽑았을 때 별 그림이 선택될 확률 : $\frac{5}{24}$

$\therefore \ \frac{5}{24} > \frac{1}{5}$

29.

(a) 카드 8장 중 1장을 뽑고 다시 섞은 후 또 1장을 뽑아서 2장의 카드를 뽑은 전체 경우의 수는 ${}_8C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$가지이다.

다이아몬드가 그려진 카드는 한 번도 나오지 않거나, 1장만 나오거나, 2장이 나온다. 그러므로 확률분포는 다음과 같다.

① $X=0$인 경우 : 두 번 모두 하트 카드가 뽑힐 확률은 $P(X=0) = \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$이다.

② $X=1$인 경우 : 한 번은 하트 카드, 다른 한 번은 다이아몬드 카드가 뽑힐 확률은
$P(X=1) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_1}{{}_8C_2} = \frac{15}{28}$이다.

③ $X=2$인 경우 : 두 번 모두 다이아몬드 카드가 뽑힐 확률은 $P(X=2) = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$이다.

$\therefore$ 확률질량함수는 $P(X=x) = \frac{{}_5C_{2-x} \times {}_3C_x}{{}_8C_2}$이다. (단, $x=0, 1, 2$)

(b) 다이아몬드가 그려진 카드가 한 번도 나오지 않거나, 1장만 나오거나, 2장이 나오는 확률분포는 다음과 같았다.

$$P(X=0) = \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}, \quad P(X=1) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_1}{{}_8C_2} = \frac{15}{28}, \quad P(X=2) = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

그러므로 사건 X에 대한 기댓값은 $E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = 0 + \frac{15}{28} + \frac{6}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$이다.

(c) 각 경우의 편차는 $0-\frac{3}{4}$, $1-\frac{3}{4}$, $2-\frac{3}{4}$이므로 이를 이용해 분산을 구하면 다음과 같다.

$$V(X) = \left(0-\frac{3}{4}\right)^2 \frac{5}{14} + \left(1-\frac{3}{4}\right)^2 \frac{15}{28} + \left(2-\frac{3}{4}\right)^2 \frac{3}{28} = \frac{180}{448} = \frac{45}{112}$$

$\therefore$ 표준편차는 $D(X) = \sqrt{\frac{45}{112}}$ 이다.

30.

$$E(X) = \frac{777}{2}$$